Cours de Robotique et d'Automatisation

Exercices (partiel), yc. corrigés

Pour la partie

2. Cinématique

Jean-Daniel Dessimoz

HAUTE ÉCOLE D'INGÉNIERIE ET DE GESTION DU CANTON DE VAUD
www.heig-vd.ch

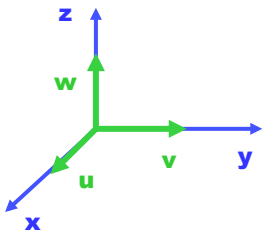
Institut d'Automatisation Industrielle
LaRA
Laboratoire de Robotique et Automatisation

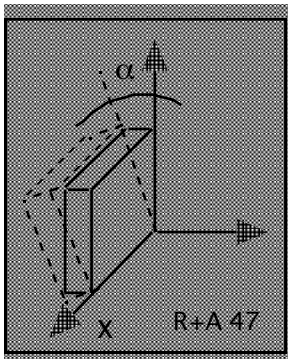
Hes·so
Haute Ecole Spécialisée de Suisse occidentale

2-0 Matrices de rotation

aaa.mm.jj, 014.10.17

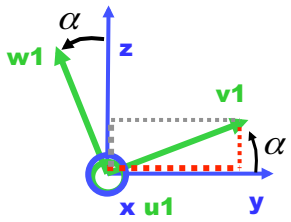
Faire le graphe des repères et transformations pour le cas de la page suivante (4 repères et rotations selon les axes de base, x,y,z.)

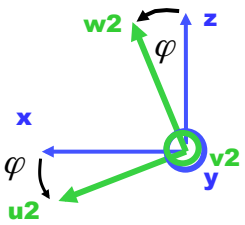


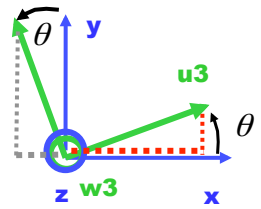


2-0 Matrices de rotation

aaa.mm.jj



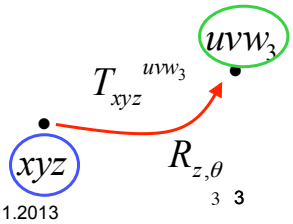




$$R_{x,\alpha} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & v_1 & w_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C_\alpha & -S_\alpha \\ 0 & S_\alpha & C_\alpha \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_{y,\varphi} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_2 & v_2 & w_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_\varphi & 0 & S_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S_\varphi & 0 & C_\varphi \end{pmatrix} \end{array}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_3 & v_3 & w_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

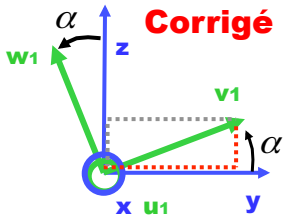


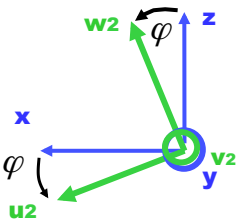
Rotations simples autour de x,y, et z

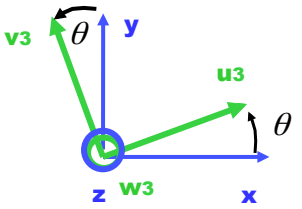
2-0 Matrices de rotation

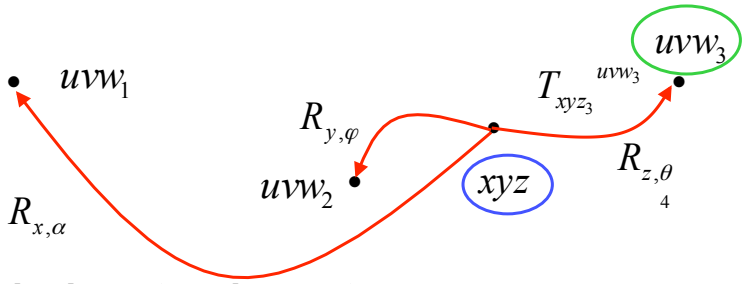
aaa.mm.jj **Corr**

Corrigé







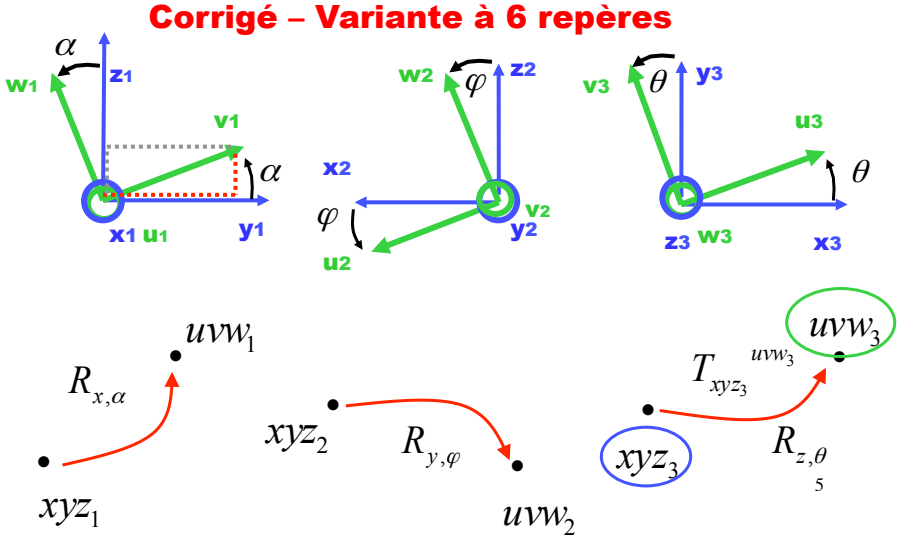


Rotations simples autour de x,y, et z

2-0 Matrices de rotation

aaa.mm.jj **Corr**

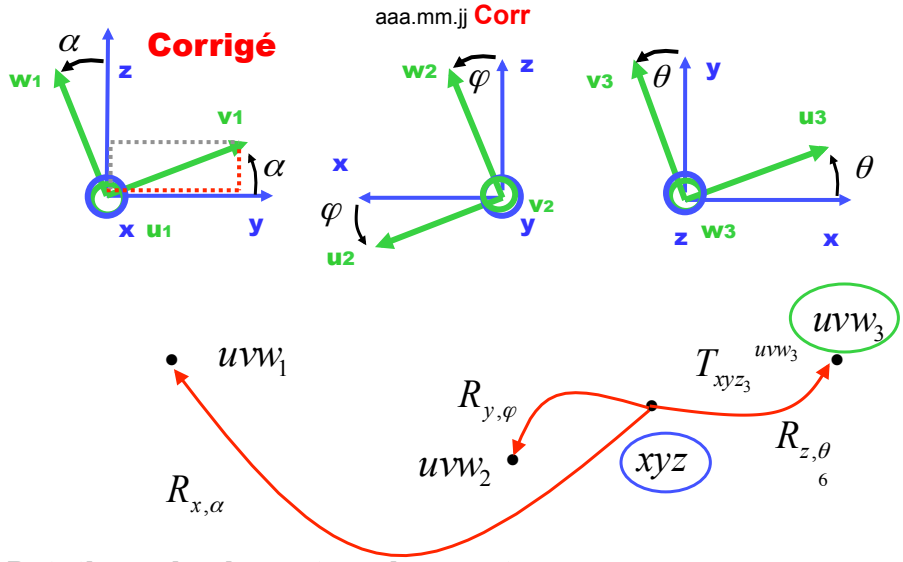
Corrigé – Variante à 6 repères



2-0 Matrices de rotation

aaa.mm.jj **Corr**

Corrigé

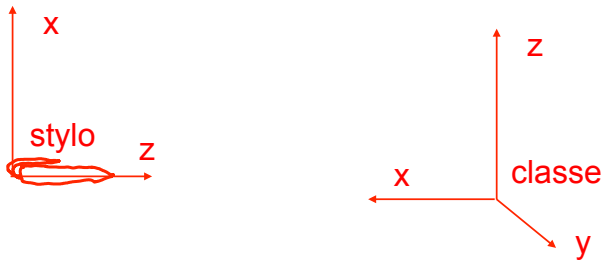


Rotations simples autour de x,y, et z

2-1 Matrice de rotation

007.10.30,008.03.11, 008.10.14 , 010.10.19 , 011.03.24, 011.10.20, 012.11.05, 013.10.29, 014.03.23

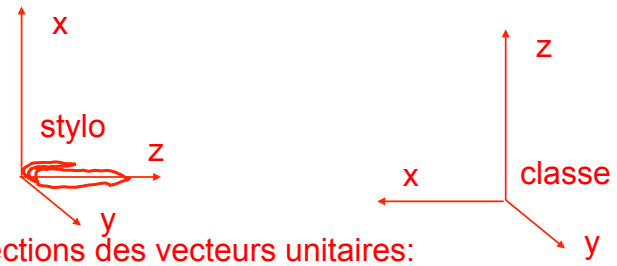
Donner la matrice de rotation décrivant l'orientation du stylo par rapport à la salle de classe dans le cas ci-dessous.



2-1 Matrice de rotation

007.10.30 **Corr** 008.03.11, 008.10.14 , 010.10.19 , 011.03.24 , 011.10.20 , 012.11.05

Donner la matrice de rotation décrivant l'orientation du stylo par rapport à la salle de classe dans le cas ci-dessous.



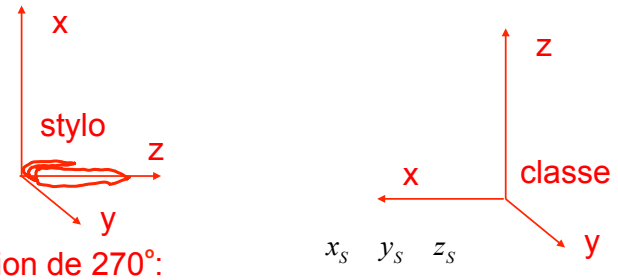
Solution 1 : projections des vecteurs unitaires:

$$R_{classe}^{\ stylo} = \begin{array}{c} \\ xc \\ yc \\ zc \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_S & y_S & z_S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2-1 Matrice de rotation

007.10.30 **Corr** 008.03.11, 008.10.14 , 010.10.19 , 011.03.24 , 011.10.20 , 012.11.05

Donner la matrice de rotation décrivant l'orientation du stylo par rapport à la salle de classe dans le cas ci-dessous.



Solution 2 : rotation de 270°:

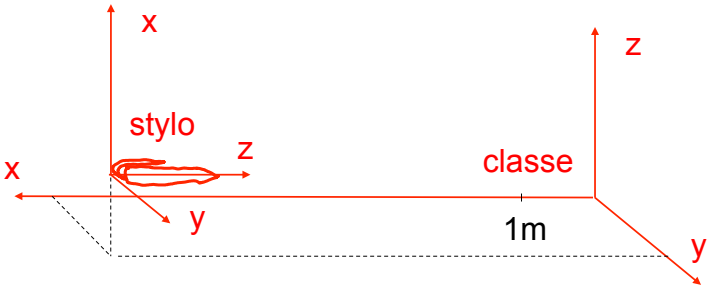
$$R_{classe}^{stylo} = \begin{array}{c} \\ xc \\ yc \\ zc \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_S & y_S & z_S \end{array} \\ \begin{pmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{pmatrix} \end{array}$$

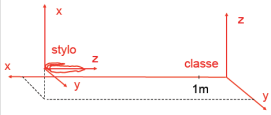
N14

2-2 Matrice de transformation

008.03.11, 008.10.28 , RVO009.03.19, 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24 , 011.10.20, 012.11.05

Imaginer un stylo posé sur la table devant le tableau de la classe. Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la position et l'orientation (« pose ») du stylo par rapport à la salle de classe (repère habituel) dans le cas ci-dessous.





2-2 Matrice de transformation

015....

N14.1

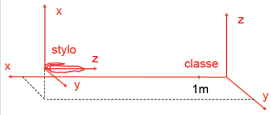
Qu'est-ce qu'une transformation dans notre contexte?

A Une translation

B Une rotation

C Une combinaison de translation et rotation

D Un changement de coordonnées



2-2 Matrice de transformation

Corrigé 015....

Qu'est-ce qu'une transformation dans notre contexte?

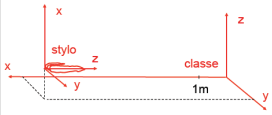
A Une translation

B Une rotation

C Une combinaison de translation et rotation

D Un changement de coordonnées

Une transformation est pour notre contexte une combinaison de translation et de rotation



2-2 Matrice de transformation

015….

N14.2

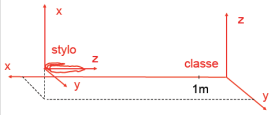
Comment représenter une transformation dans ce cas?

A Un vecteur 1x3

B Une matrice 3x3

C Une matrice 4x4

D Une liste de coordonnées



2-2 Matrice de transformation

Corrigé 015….

Comment représenter une transformation dans ce cas?

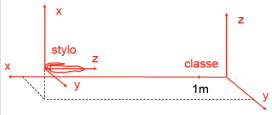
A Un vecteur 1x3

B Une matrice 3x3

C Une matrice 4x4

D Une liste de coordonnées

Une transformation se représente ici par des matrices 4x4, en coordonnées homogènes. Il est aussi courant de décrire une transformation par des coordonnées de translations et rotations, mais cela ne permet pas de combiner facilement plusieurs transformations.



2-2 Matrice de transformation

N14.3

015….

Quelle est la position du stylo (ignorons d'abord les rotations)?

A

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ s \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B

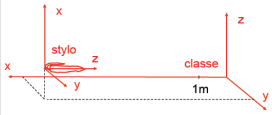
$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ p \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



2-2 Matrice de transformation

Corrigé 015….

Quelle est la position du stylo (ignorons d'abord les rotations)?

A

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ s \end{array} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B

$$\boxed{\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

C

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ p \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

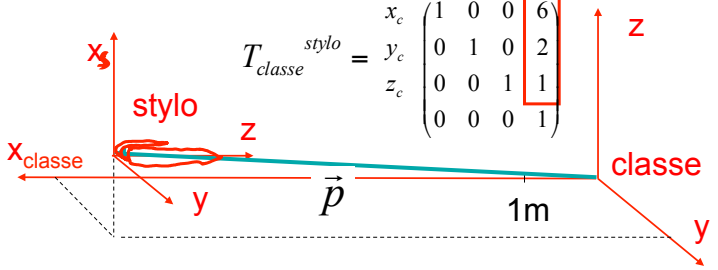
Une matrice de transformation en coordonnées homogènes comprend l'information de translation en 4ième colonne

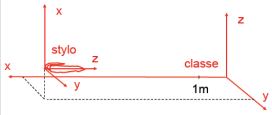
2-2 Matrice de transformation

Corr 007.10.30, 008.03.11, 008.10.28, RVO009.03.19, 009.10.26, 010.10.19 , 011.03.24 , 011.10.20 , 012.11.05, 014.03.24

Imaginer un stylo posé sur la table devant le tableau de la classe. Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la **position** ~~et l'orientation (« pose »)~~ du stylo par rapport à la salle de classe (repère habituel) dans le cas ci-dessous.

$$T_{classe}^{stylo} = \begin{array}{c} \\ x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$





2-2 Matrice de transformation

N14.4

015….

Quelle est la position et l'orientation (pose) du stylo?

A

$$\begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0° & 0° & 2° & 1 \end{pmatrix}$$

B

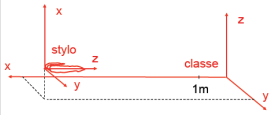
$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0° & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0° & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2° & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D

$$\begin{array}{c} \\ x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



2-2 Matrice de transformation

Corrigé 015….

Quelle est la position et l'orientation (pose) du stylo?

A

$$\begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0° & 0° & 2° & 1 \end{pmatrix}$$

B

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C

$$\begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \end{array} \begin{pmatrix} 0° & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0° & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2° & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D

$$\begin{array}{c} \\ x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

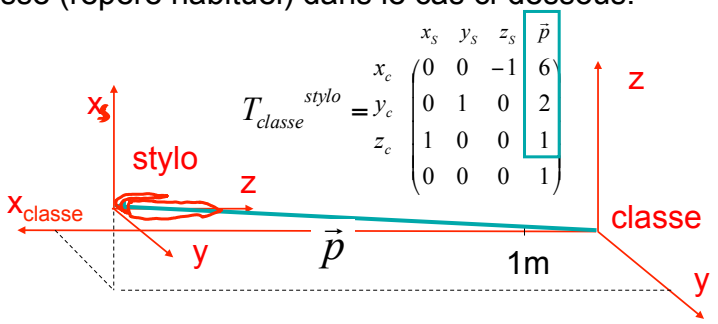
Une matrice de transformation en coordonnées homogènes comprend l'information de rotation dans une sous-matrice 3x3 formée des projections de vecteurs unitaires.
Les colonnes comprennent les vecteurs « mobiles », du stylo; les lignes, ceux du repère « fixe », « de départ », ici, de la classe.

2-2 Matrice de transformation

Corr 007.10.30, 008.03.11, 008.10.28, RVO009.03.19, 009.10.26, 010.10.19 , 011.03.24 , 011.10.20 , 012.11.05, 014.03.24

Imaginer un stylo posé sur la table devant le tableau de la classe. Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la position et l'orientation (« pose ») du stylo par rapport à la salle de classe (repère habituel) dans le cas ci-dessous.

$$T_{classe}^{\ stylo} = \begin{array}{c} \\ x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

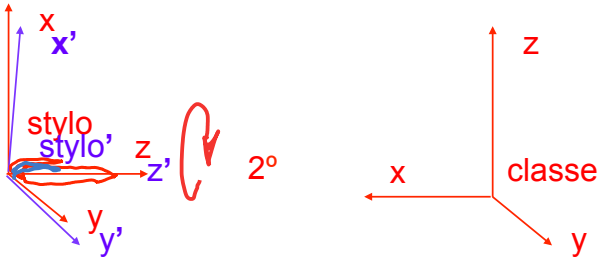


N15

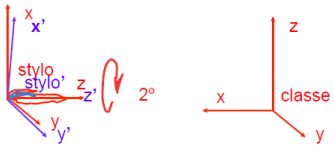
2.2-1… Analogie graphique ,

RSA 011.10.20 , 012.11.05, 014.03.31, 014.10.27

Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la position et l'orientation (« pose ») du stylo par rapport à la salle de classe après qu'il ait tourné de 2 degrés autour de son propre axe z.
Utiliser un GRT (graphe repères-transformations).



N15.1



2.2-1… Analogie graphique

Quelle est la matrice de base de rotation autour de z en coordonnées homogènes?

A

$$\begin{array}{c} \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

B

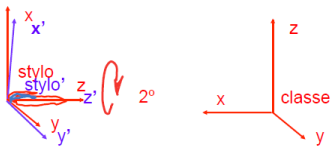
$$\begin{array}{c} \\ xc \\ yc \\ zc \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_S & y_S & z_S \end{array} \\ \begin{pmatrix} C\varphi & 0 & S\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\varphi & 0 & C\varphi \end{pmatrix} \end{array}$$

C

$$R_{z,\theta} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

D

$$R_{z,\theta} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u & v & w & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} C_\theta & -S_\theta & 0 & 0 \\ S_\theta & C_\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



2.2-1… Analogie graphique

N15.1

Quelle est la matrice de base de rotation autour de z en coordonnées homogènes?

A

$$\begin{array}{c|cccc} & x_S & y_S & z_S & \vec{p} \\ \hline x_c & 0 & 0 & -1 & 6 \\ y_c & 0 & 1 & 0 & 2 \\ z_c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

B

$$\begin{array}{c|ccc} & x_S & y_S & z_S \\ \hline xc & C\varphi & 0 & S\varphi \\ yc & 0 & 1 & 0 \\ zc & -S\varphi & 0 & C\varphi \end{array}$$

C

$$R_{z,\theta} = \begin{array}{c|ccc} & u & v & w \\ \hline x & C_\theta & -S_\theta & 0 \\ y & S_\theta & C_\theta & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

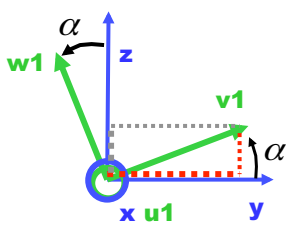
D

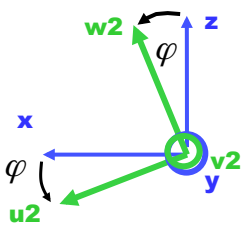
$$R_{z,\theta} = \begin{array}{c|cccc} & u & v & w & \vec{p} \\ \hline x & C_\theta & -S_\theta & 0 & 0 \\ y & S_\theta & C_\theta & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

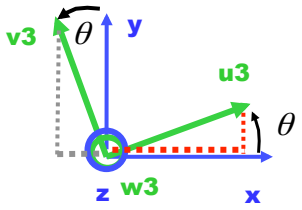
2-0 Matrices de rotation

Corr

aaa.mm.jj



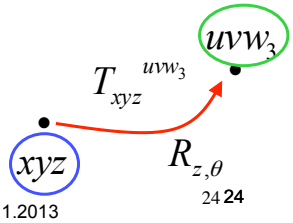




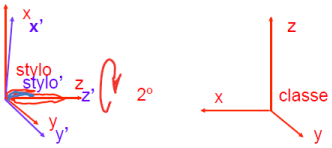
$$R_{x,\alpha} = \begin{array}{c|ccc} & u_1 & v_1 & w_1 \\ \hline x & 1 & 0 & 0 \\ y & 0 & C_\alpha & -S_\alpha \\ z & 0 & S_\alpha & C_\alpha \end{array}$$

$$R_{y,\varphi} = \begin{array}{c|ccc} & u_2 & v_2 & w_2 \\ \hline x & C_\varphi & 0 & S_\varphi \\ y & 0 & 1 & 0 \\ z & -S_\varphi & 0 & C_\varphi \end{array}$$

$$R_{z,\theta} = \begin{array}{c|ccc} & u_3 & v_3 & w_3 \\ \hline x & C_\theta & -S_\theta & 0 \\ y & S_\theta & C_\theta & 0 \\ z & 0 & 0 & 1 \end{array}$$



Rotations simples autour de x,y, et z



2.2-1… Analogie graphique

N15.2

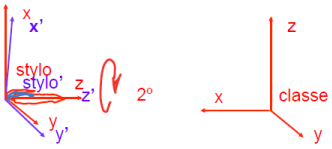
Que devient un repère dans le graphe des repères et transformations (GRT)?

A Cela reste un repère

B un point

C une flèche

D un vecteur position



2.2-1… Analogie graphique

N15.2

Que devient un repère dans le graphe des repères et transformations?

A Cela reste un repère

B un point

C une flèche

D un vecteur position

Un repère devient un point, placé n'importe où. Dans le cas particulier, il y en a trois.

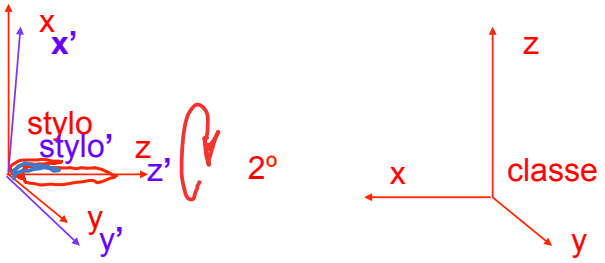
2.2-1… Analogie graphique ,

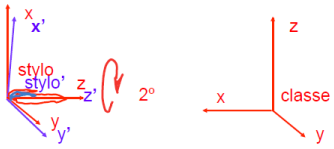
Corr RSA 011.10.20 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

1. Faire le graphe

1.1. repères => points

- stylo
- classe
- stylo'





2.2-1… Analogie graphique

N15.3

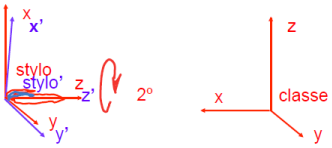
Que devient une transformation dans le graphe des repères et transformations?

A Une flèche avec origine selon le repère de lignes et l'extrémité selon le repère de colonnes

B Une flèche directe et une flèche inverse

C Une flèche avec origine selon le repère de colonnes et l'extrémité selon le repère des lignes

D Deux flèches, l'une vers le repère de lignes et l'autre vers le repère de colonnes



2.2-1… Analogie graphique

N15.3

Que devient une transformation dans le graphe des repères et transformations?

A Une flèche avec origine selon le repère de lignes et l'extrémité selon le repère de colonnes

B Une flèche directe et une flèche inverse

C Une flèche avec origine selon le repère de colonnes et l'extrémité selon le repère des lignes

D Deux flèches, l'une vers le repère de lignes et l'autre vers le repère de colonnes

Une transformation se représente par une flèche partant typiquement du repère de base, "observateur", et pointant vers le repère décrit, celui d'un objet mobile.

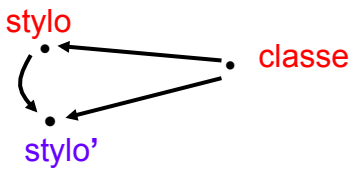
2.2-1… Analogie graphique ,

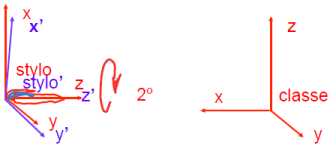
Corr RSA 011.10.20, 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

1. Faire le graphe

1. 1 repères => points

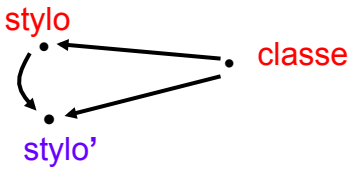
1. 2 transformations => flèches





2.2-1… Analogie graphique

N15.4



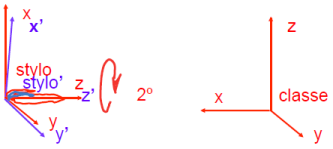
Quelles sont nos conventions d'écriture et d'expression orale pour les transformations (contexte GRT)?

A $T_{classe}^{\ stylo}$

B $classeT^{stylo}$

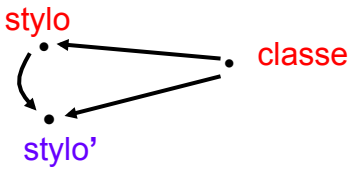
C $R_{z,2^\circ}$

D $\begin{array}{c} \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$



2.2-1… Analogie graphique

N15.4



Quelles sont nos conventions d'écriture et d'expression orale pour les transformations (contexte GRT)?

A $T_{classe}^{\ stylo}$

B $classeT^{stylo}$

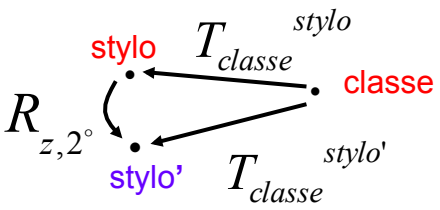
C $R_{z,2^\circ}$

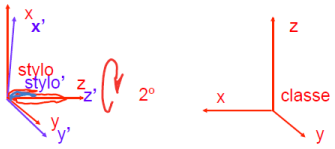
D $\begin{array}{c} \\ x_c \\ y_c \\ z_c \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_S & y_S & z_S & \vec{p} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

2.2-1… Analogie graphique ,

Corr RSA 011.10.20, 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

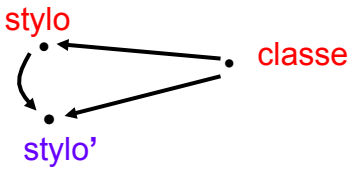
1. **Faire le graphe**
   - **1. 1 repères => points**
   - **1. 2 transformations => flèches**





2.2-1… Analogie graphique

N15.5



Comment les transformations se combinent-elles? Relations GRT et équations matricielles

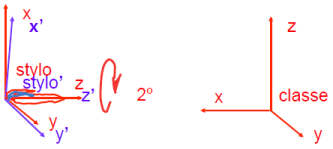
A Aggrégation de flèches successives <=> produit des matrices correspondantes

C Flèche inverse <=> matrice inverse

E réponses A et C et D

B réponses A et C

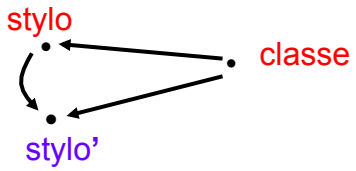
D Si une opération est simple dans un repère r, alors:
- y aller
- faire l'opération simple
- en revenir



2.2-1… Analogie graphique

N15.5

Comment les transformations se combinent-elles? Relations GRT et équations matricielles



A Aggrégation de flèches successives <=> produit des matrices correspondantes

C Flèche inverse <=> matrice inverse

E réponses A et C et D

B réponses A et C

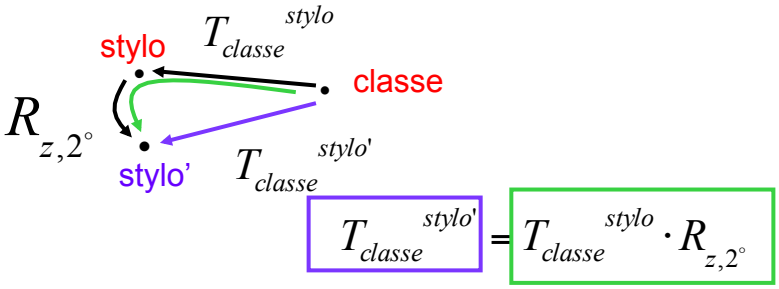
D Si une opération est simple dans un repère r, alors:

- y aller
- faire l'opération simple
- en revenir

2.2-1… Analogie graphique ,

Corr RSA 011.10.20 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

1. **Faire le graphe**
   1. **1 repères => points**
   1.2 **transformations => flèches**
2. **Trouver un chemin équivalent**

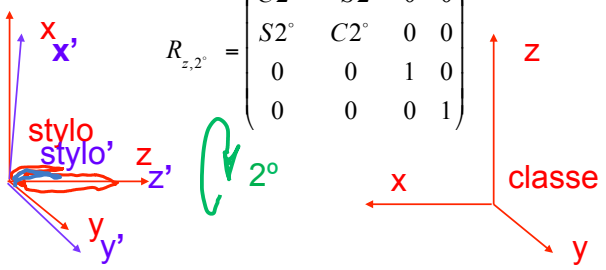


2.2-1… Analogie graphique ,

Corr. RSA 011.10.20 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la position et l'orientation (« pose ») du stylo par rapport à la salle de classe après qu'il ait tourné de 2 degrés autour de son propre axe z.

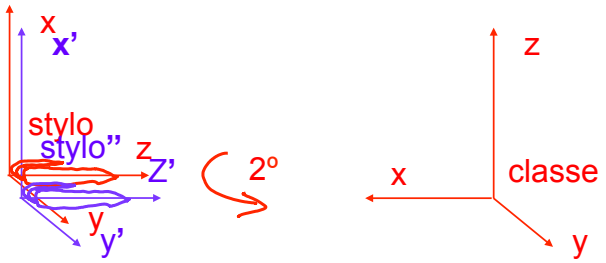
$$R_{z,2^\circ} = \begin{pmatrix} C2^\circ & -S2^\circ & 0 & 0 \\ S2^\circ & C2^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2.2-1 Analogie graphique (GRT) , N16

008.10.28, , RVO009.03.19, 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la position et l'orientation (« pose ») du stylo par rapport à la salle de classe après qu'il ait tourné de 2 degrés autour du z de la classe.



2.2-1 Analogie graphique (GRT) , N16.1

008.10.28, , RVO009.03.19, 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la position et l'orientation (« pose ») du stylo par rapport à la salle de classe après qu'il ait tourné de 2 degrés autour du z de la classe.

A $T_{classe}^{stylo''} = T_{classe}^{stylo} \cdot R_{z,2^\circ}$

B $T_{classe}^{stylo''} = T_{classe}^{stylo} \cdot T \cdot R_{z,2^\circ} \cdot T^{-1}$

avec $T = \left(T_{classe}^{stylo}\right)^{-1}$

C $T_{classe}^{stylo''} = R_{z,2^\circ} \cdot T_{classe}^{stylo}$

D réponses B ou C

E réponses A ou B ou C

2.2-1 Analogie graphique (GRT) , N16.1

008.10.28, , RVO009.03.19, 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

Donner la matrice de transformation en coordonnées homogènes décrivant la position et l'orientation (« pose ») du stylo par rapport à la salle de classe après qu'il ait tourné de 2 degrés autour du z de la classe.

A $T_{classe}^{stylo''} = T_{classe}^{stylo} \cdot R_{z,2^\circ}$

B $T_{classe}^{stylo''} = T_{classe}^{stylo} \cdot T \cdot R_{z,2^\circ} \cdot T^{-1}$

avec $T = \left(T_{classe}^{stylo}\right)^{-1}$

C $T_{classe}^{stylo''} = R_{z,2^\circ} \cdot T_{classe}^{stylo}$

D réponses B ou C

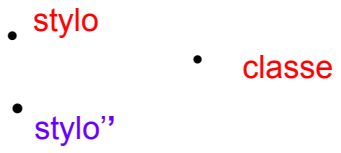
E réponses A ou B ou C

2.2-1 Analogie graphique 1 de 6

Corr 008.03.11 , 008.10.28 , RVO009.03.19 , 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24, 011.10.20 , 012.11.0 , 014.03.31 5, 014.10.27

1. Faire le graphe

1.1. repères => points



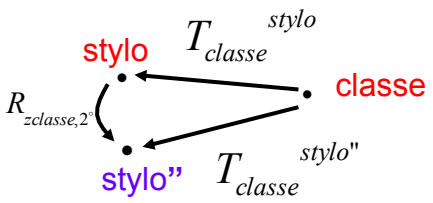
2.2-1 Analogie graphique 2 de 6

Corr 008.03.11 , 008.10.28 , RVO009.03.19 , 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24, 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

1. Faire le graphe

1. 1 repères => points

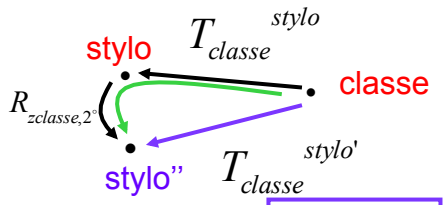
1. 2 transformations => flèches



2.2-1 Analogie graphique 3 de 6

Corr 008.03.11 , 008.10.28 , RVO009.03.19 , 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24, 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

1. Faire le graphe
   1. 1 repères => points
   1.2 transformations => flèches
2. Trouver un chemin équivalent

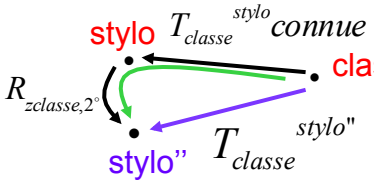


$$\boxed{T_{classe}^{stylo''}} = \boxed{T_{classe}^{stylo} \cdot R_{zclasse,2^\circ}}$$

2.2-1 Analogie graphique 4 de 6

Corr 008.03.11 , 008.10.28 , RVO009.03.19 , 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24, 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

1. Faire le graphe
   1. 1 repères => points
   1.2 transformations => flèches
2. Trouver un chemin équivalent
3. Evaluer les matrices



$$\boxed{T_{classe}^{stylo''}} = \boxed{T_{classe}^{stylo} \cdot R_{zclasse,2^\circ}}$$

$$T_{classe}^{stylo} = \begin{array}{c} x_c \\ y_c \\ z_c \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

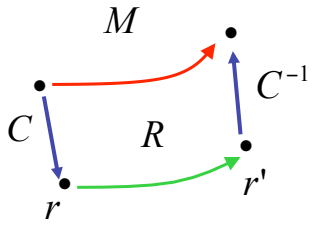
$R_{zclasse,2^\circ} = ??$ **pas simple dans le repère stylo**

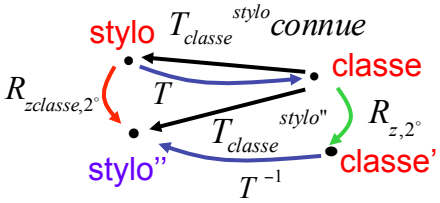
2.2-1 Analogie graphique 5 de 6

Corr 008.03.11 , 008.10.28 , RVO009.03.19 , 009.10.26 , 010.10.19 , 011.03.24, 011.10.20, 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

Si une opération est simple dans un repère « r » (c'est-à-dire que l'opération est définie par rapport à l'un des axes x, y ou z de r), il faut:

- **y aller avec une transformation , C,**
- **y faire l'opération simple, R,**
- **en revenir avec l'inverse de C, C^{-1}**





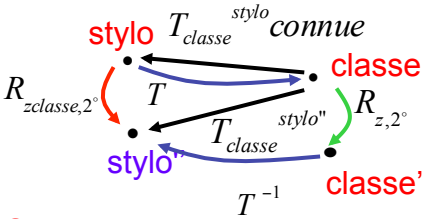
$$\boxed{R_{zclasse,2^\circ}} = T \cdot \boxed{R_{z,2^\circ}} \cdot T^{-1}$$

$$R_{z,2^\circ} = \begin{pmatrix} C2^\circ & -S2^\circ & 0 & 0 \\ S2^\circ & C2^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

simple dans le repère classe

2.2-1 Analogie graphique 6 de 6

Corr 008.03.11 , 008.10.28, RVO009.03.19 , 009.10.26 , 010.10.19, 011.03.24 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27



$$T_{classe}^{stylo''} = T_{classe}^{stylo} \cdot \boxed{R_{zclasse,2^\circ}}$$

$$R_{zclasse,2^\circ} = T \cdot R_{z,2^\circ} \cdot T^{-1}$$

Solution 1:

$$T_{classe}^{stylo''} = T_{classe}^{stylo} \cdot T \cdot \boxed{R_{z,2^\circ}} \cdot T^{-1} \qquad T = \left(T_{classe}^{stylo}\right)^{-1}$$

Solution 2 (plus immédiate, évidente sur le graphique):

$$T_{classe}^{stylo''} = R_{z,2^\circ} \cdot \left(\left(T_{classe}^{stylo}\right)^{-1}\right)^{-1} = R_{z,2^\circ} \cdot T_{classe}^{stylo}$$

2.2-1 Analogie graphique 6b de 6

Corr 008.03.11 , 008.10.28, RVO009.03.19 , 009.10.26 , 010.10.19, 011.03.24 , 012.11.05 , 014.03.31, 014.10.27

Fonctions disponibles dans des langages de robot:

$$R_{zclasse,2^\circ} = T \cdot R_{z,2^\circ} \cdot T^{-1}$$

$$T_{classe}^{stylo''} = T_{classe}^{stylo} \cdot T \cdot \boxed{R_{z,2^\circ}} \cdot T^{-1} \qquad T = \left(T_{classe}^{stylo}\right)^{-1}$$

	Matrice inverse	*Produit matriciel*
Stäubli/V+:	set tinv=inverse(t)	t3=t1:t2
Stäubli/Val3:	tinv=!t	t3=t1*t2
ABB/Rapid:	tinv:=PoseInv(t)	t3:=PoseMult(t1.t2)
Piaget:	tinv=MatriceInverse(t)	MultMatrices(t1.t2.t3)

2.2-1 Analogie graphique 6c de 6

Corr 0

Fonctions accessoires éventuellement utiles, en langage pour robot Stäubli/Val3 (cf. notions "parasites" liées aux points, repères, outils…).

Apprentissage d'un point (Teaching): pMonPoint=here(tOutil,world)

Demande de mouvement:

movej(pMonPoint, tflange, mNomSpeed)

Définition d'un point à l'origine de World: pNull=pMonPoint, puis

trNull={0,0,0,0,0,0}, puis pNull.trsf=trNull

Extraction de la partie géométrique ("transformation") d'un "point":

trMaTransformation=position(pMonPoint,fWorld)

Création d'un point à partir d'une transformation

pMonPoint=pNull, puis pMonPoint.trsf=trMaTransformation

Création d'un repère ("frame"):

nErreur=SetFrame(pOrigine, pAxeX, pPlanYX, fPalette)

Mouvement simple, relatif, à interpréter dans un repère quelconque, à définir:

pMonNouveauPoint=compose(pMonPoint, fMonRepereOuSimple, trMaTransformationSimple)

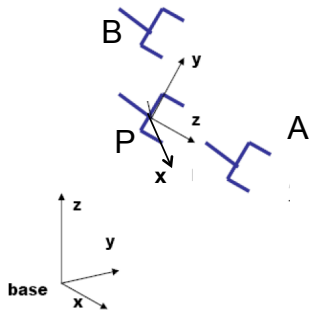
2.2-2 Analogie graphique 1 de 8

010.11. 01-02

Soit une pince, positionnée en P.

Dans un cas, étudier la spécification du point A, correspondant au déplacement dans l'axe de l'outil, z_{pince} , z_P , de 100 mm.

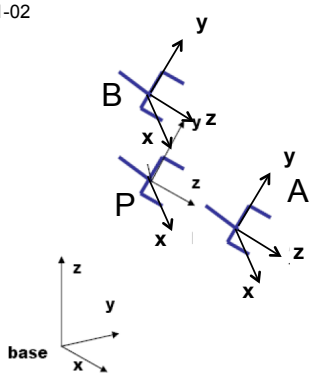
Dans le deuxième cas, étudier la spécification du point B, situé à100 mm en vertical , c'est-à-dire déplacé parallèlement à z_{base} .



2.2-2 Analogie graphique 2 de 8

Corr 010.11. 01-02

1. Compléter les repères

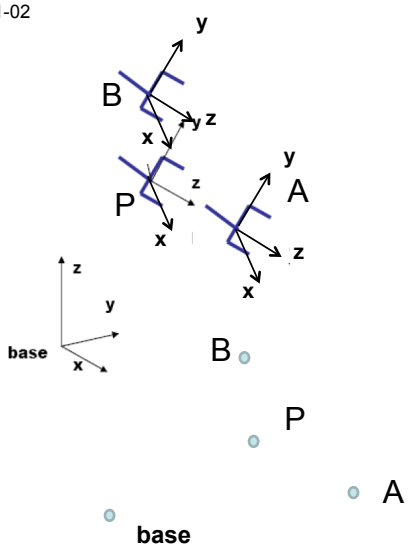


2.2-2 Analogie graphique 3 de 8

Corr 010.11. 01-02

2. Faire le graphe des repères et transformations

2a Repères



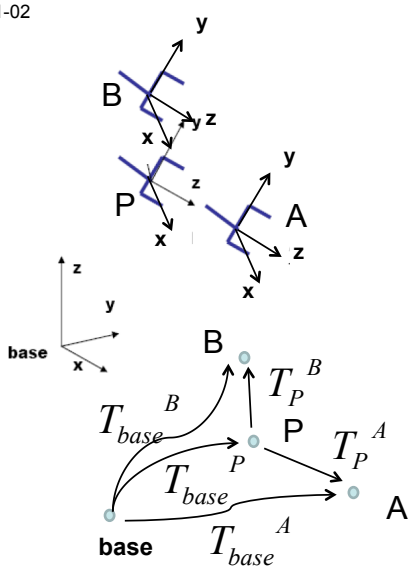
2.2-2 Analogie graphique 4 de 8

Corr 010.11. 01-02

2. Faire le graphe des repères et transformations

2a Repères

2b Transformations



2.2-2 Analogie graphique 5 de 8

Corr 010.11. 01-02

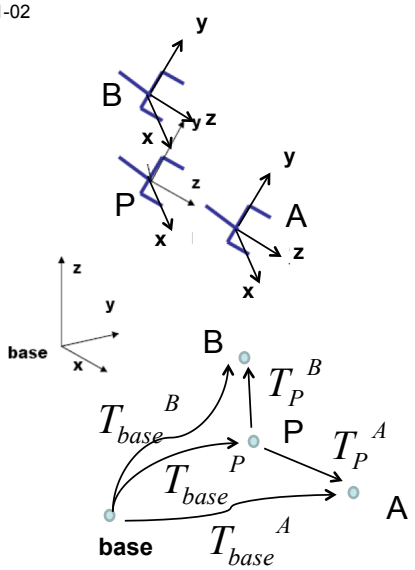
3. Spécifier les transformations pour définir les positions A et B.

3a Les positions s'entendent typiquement par rapport à la base. P est spécifié par $T_{base}{}^{P}$, connue.

3b La position A est facilement définie par une translation selon le z de P

$$T_{base}{}^{A} = T_{base}{}^{P} \cdot T_{P}{}^{A} = T_{base}{}^{P} \cdot T_{z,100}$$

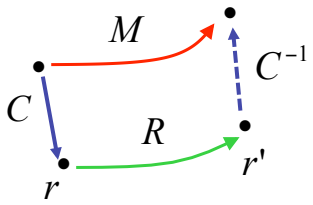
$$T_{z,100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2.2-2 Analogie graphique 6 de 8

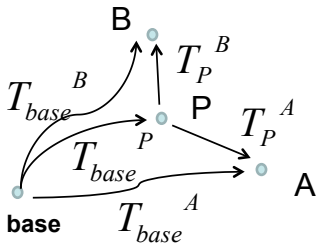
Corr 010.11. 01-02

3c La position B ne se définit pas simplement à partir du repère P, comme pour la transformation M vue au cours. On peut cependant aussi aller dans un repère r où l'opération est simple à l'aide d'une transformation C, faire l'opération simple, R, et revenir avec l'inverse de C.



.

$$\boxed{T_{z,100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

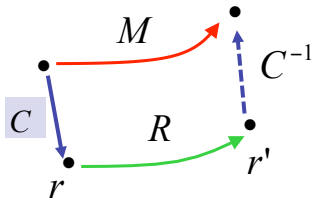


2.2-2 Analogie graphique 7 de 8

Corr 010.11. 01-02

3c $T_{base}{}^{B} = T_{base}{}^{P} \cdot \boxed{T_P{}^{B}}$; $\boxed{T_P{}^{B} = ??}$

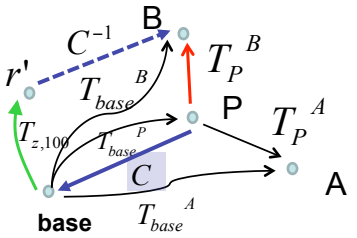
La position B ne se définit pas simplement à partir du repère P, comme pour la transformation M vue au cours. On peut cependant aussi aller dans un repère r où l'opération est simple à l'aide d'une transformation C, faire l'opération simple, R, et revenir avec l'inverse de C.



$$T_P{}^{B} = \boxed{C} \cdot \boxed{T_{z,100}} \cdot \boxed{C^{-1}} \; ; \; C = \left(T_{base}{}^{P}\right)^{-1}$$

$$T_{base}{}^{B} = T_{base}{}^{P} \cdot \boxed{\left(T_{base}{}^{P}\right)^{-1}} \cdot \boxed{T_{z,100}} \cdot \boxed{\left(\left(T_{base}{}^{P}\right)^{-1}\right)^{-1}}$$

$$T_{base}{}^{B} = \boxed{T_{z,100}} \cdot \boxed{T_{base}{}^{P}}$$

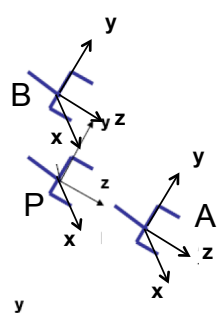


2.2-2 Analogie graphique 8 de 8

Corr 010.11.01-02

Déplacement dans l'axe de l'outil, z_{tool}, de 100 mm (de la position A à B):

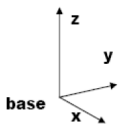
Do Move Here : Trans(0,0,100,0,0,0);

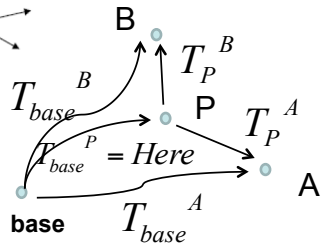


Déplacement en vertical de 100 mm , selon z_{base} (de la position A à C): la transformation n'est pas simple ; il vaut mieux aller dans le repère de base faire la translation .

Do Move Here :inverse(Here) :

Trans(0,0,100,0,0,0) : inverse(inverse(Here));





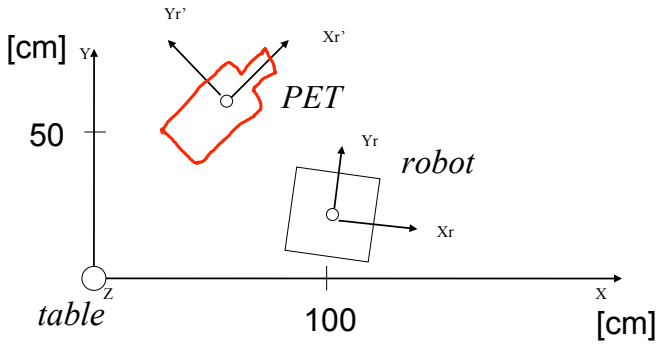
2. Matrices de transformation

Aller voir sous 2.4.

2.2.4 Graphe des transformations

006.11.17, 007.04.17, 007.11.05

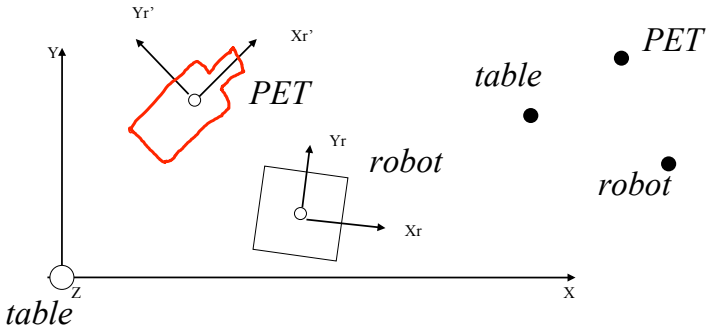
Soit une table de jeu avec une bouteille de PET et un robot. Si la position de la bouteille et celle du robot sont connues par rapport à la table, donner la position (« transformation ») de la bouteille par rapport au robot.



2.2.4 Graphe des transformations

006.11.17, 007.11.05 corr 1 de 6

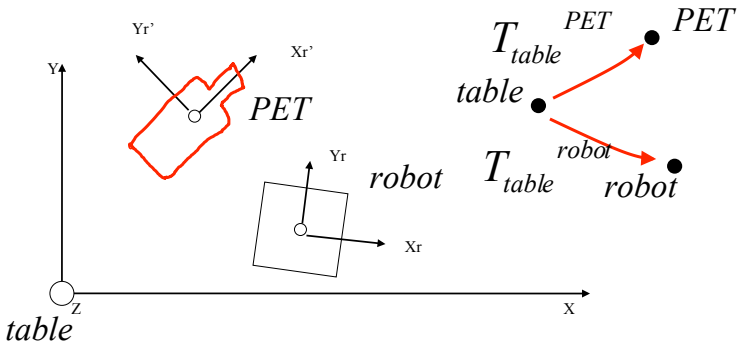
Les repères sont représentés par des points…



2.2.4 Graphe des transformations

006.11.17 , 007.11.05 corr 2 de 6

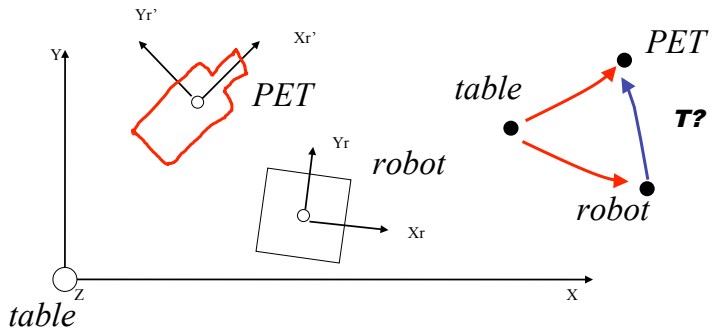
…la position de la bouteille et celle du robot sont connues par rapport à la table…



2.2.4 Graphe des transformations

006.11.17 , 007.11.05 corr 3 de 6

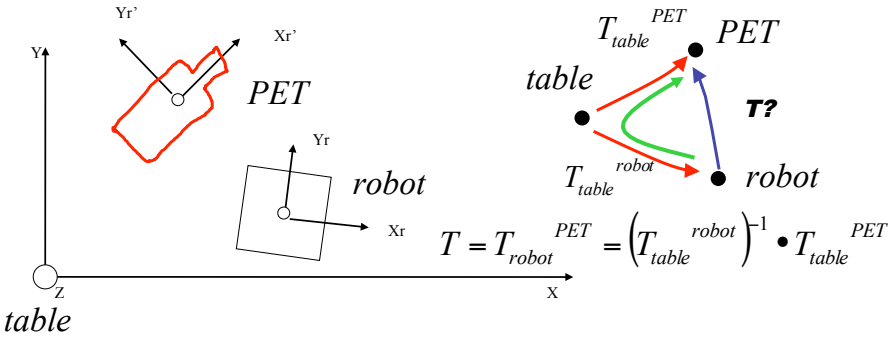
… donner la position (« transformation ») de la bouteille par rapport au robot, T.



2.2.4 Graphe des transformations

006.11.17 , 007.11.05 corr 4 de 6

Le graphe fait apparaître des chemins équivalents (même départ, et même arrivée), donc une égalité matricielle.

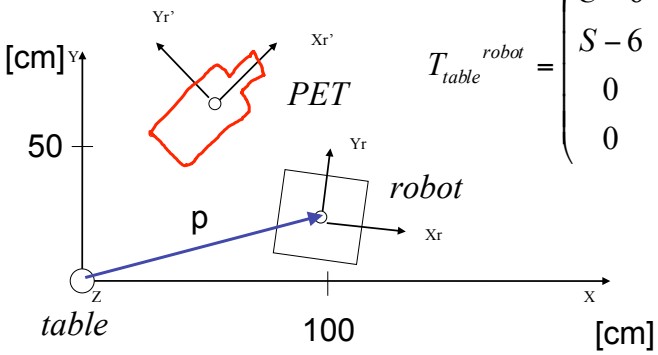


$$T = T_{robot}^{PET} = \left(T_{table}^{robot}\right)^{-1} \bullet T_{table}^{PET}$$

2.2.4 Graphe des transformations

007.04.17 , 007.11.05 corr 5 de 6

Par ex. les valeurs numériques de T_{table}^{robot} sont les suivantes… :

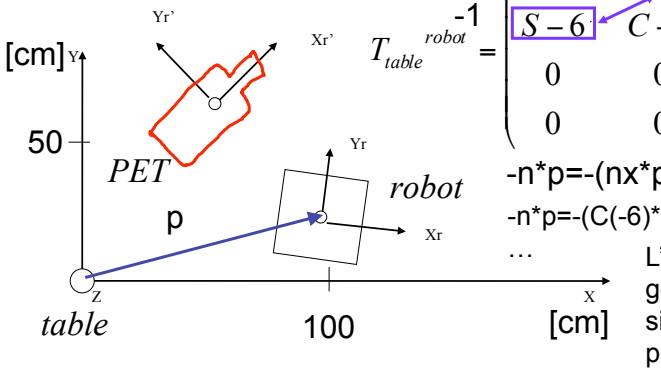


$$T_{table}^{robot} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} C-6 & -S-6 & 0 & \boxed{100} \\ S-6 & C-6 & 0 & \boxed{20} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

2.2.4 Graphe des transformations

007.04.17 , 007.11.05 corr 6 de 6

…et l'inverse de T_{table}^{robot} est la suivante:



$$T_{table}^{robot\,-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n & g & a & p \end{array} \\ \begin{pmatrix} C-6 & \boxed{-S-6} & 0 & \boxed{100} \\ \boxed{S-6} & C-6 & 0 & \boxed{20} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ -n\cdot p \\ -g\cdot p \\ -a\cdot p \\ \\ \end{array}$$

-n*p=-(nx*px+ny*py+nz*pz)

-n*p=-(C(-6)*100+S(-6)*20+0*0)

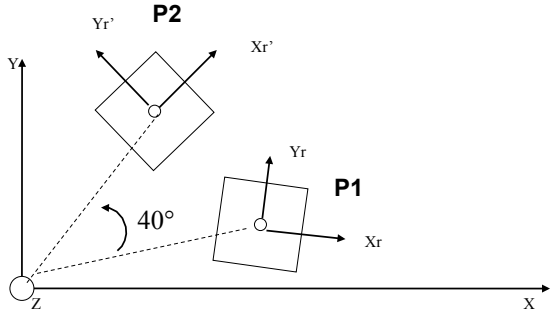
…

L'inversion de matrice est généralement faite simplement dans les programmes

2.2.5 Graphe des transformations

005.12.09. 006.05.05, 007.11.06

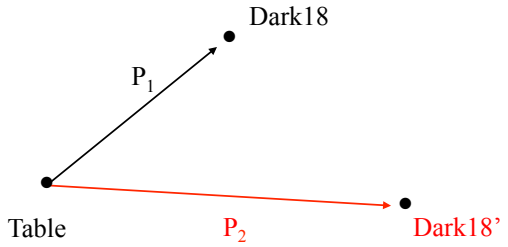
Dark18 est en P1. L'arbitre lui fait subir une rotation de 40° par rapport au Z de la table. Quelle est sa nouvelle position ?



2.2.5 Graphe des transformations

005.12.09 , 007.11.06, corrigé 1 de 3

Reprise de la donnée: 3 repères; une transformation connue, P1, et celle qu'on veut trouver, P2



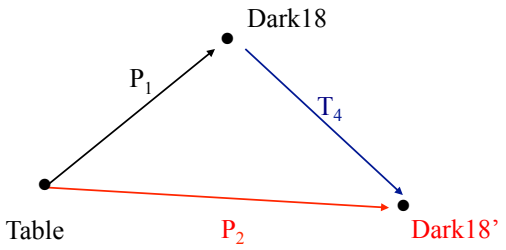
2.2.5 Graphe des transformations

005.12.09 , 007.11.06 corrigé 2 de 3

L'opération T4 n'est pas simple dans le repère Dark18, car la rotation se fait par rapport au z du repère Table

$$P_2 = P_1 \cdot T_4$$

$$T_4 = ?$$



2.2.5 Graphe des transformations

005.12.09 , 007.11.06 corrigé 3 de 3

L'opération est simple dans le repère « Table ».
On y va donc (T); puis on en revient (T^{-1}).

$$T_4 = C \cdot T_{z,40°} \cdot C^{-1} = (P_1)^{-1} \cdot T_{z,40°} \cdot P_1$$

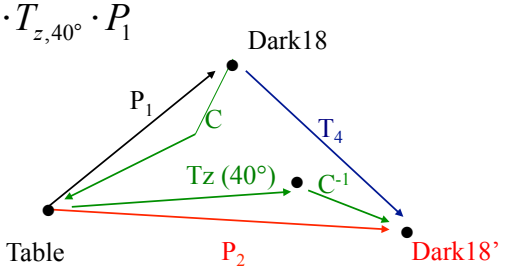
$$C = P_1^{-1}$$

$$C^{-1} = \left(P_1^{-1}\right)^{-1} = P_1$$

$$P_2 = P_1 \cdot C \cdot T_{z,40°} \cdot C^{-1}$$

$$P_2 = P_1 \cdot P_1^{-1} \cdot T_{z,40°} \cdot P_1$$

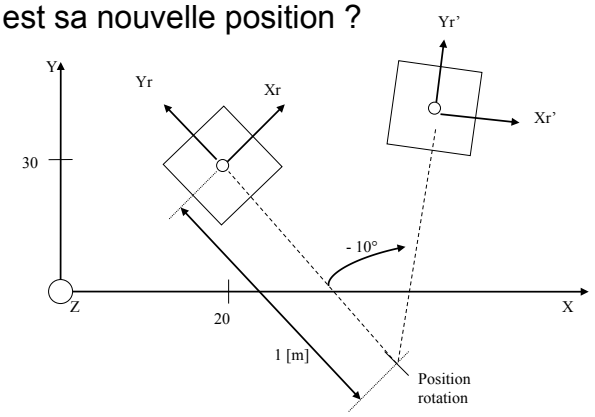
$$P_2 = T_{z,40°} \cdot P_1$$



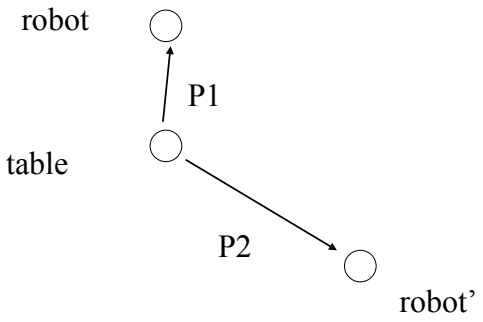
2.2.6 Graphe des transformations

005.12.12, 006.12.11

Dark18 se trouve en 20, 30 et 40°. Il tourne à droite avec un rayon de courbure de 1 [m] et un angle de -10°. Quelle est sa nouvelle position ?



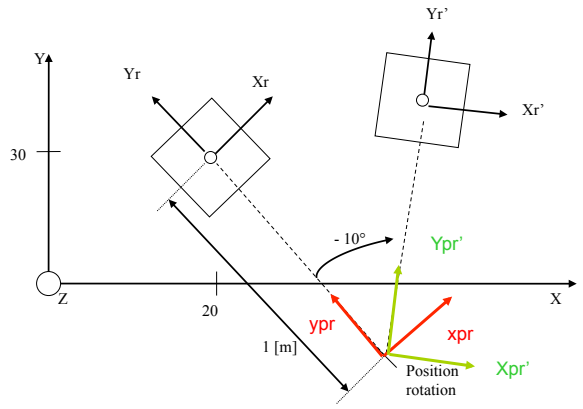
Exo 2.2.6 corrigé 1 de 4 005.12.12, 006.12.11



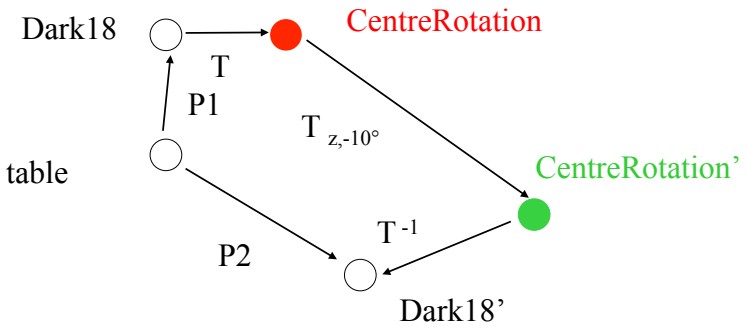
2.2.6 Graphe des transformations

corrigé 2 de 4 005.12.12, 006.12.11

Ajout de repères intermédiaires



Exo 2.2.6 corrigé 3 de 4 005.12.12, 006.12.11



$$P_2 = P_1 \cdot T \cdot T_{z,-10°} \cdot T^{-1}$$

Exo 2.2.6 corrigé 4 de 4 005.12.12, 006.12.11

$$P_1 = \begin{pmatrix} Cos40 & -Sin40 & 0 & 0{,}2 \\ Sin40 & Cos40 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_{z,-10°} = \begin{pmatrix} Cos-10 & -Sin-10 & 0 & 0 \\ Sin-10 & Cos-10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

=>

$$P_2 = P_1 \cdot T \cdot T_{z,-10°} \cdot T^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} Cos40 & -Sin40 & 0 & 0{,}2 \\ Sin40 & Cos40 & 0 & 0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{matrix} Cos40 & -Sin40 & 0 & Sin40+0{,}2 \\ Sin40 & Cos40 & 1 & -Cos40+0{,}3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \cdot T_{z,-10°} \cdot T^{-1}$$

Avec C40 = 0,76666

...

2.4.2.7 Matrice de transformation

005.12.09, 007.11.05, 011.01.25

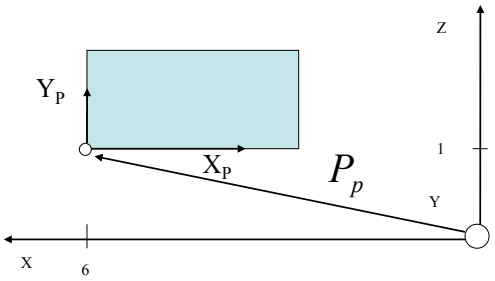
Donner la matrice $T_{Classe}^{Tableau}$ de transformation en coordonnées homogènes décrivant la « position » et l'orientation du tableau noir par rapport à la salle de la classe ?

2.4.2.7 Matrice de transformation 005.12.09, 007.11.05 , 011.01.25 corrigé

Matrice position tableau / classe :

$$T_{classe}^{tableau} =$$

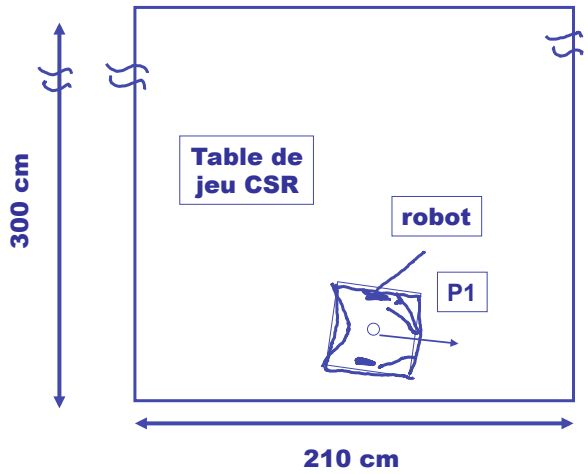
$$\begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_p & Y_p & Z_p & P_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



2.4.2.8 Matrice de transformation

006.11.20

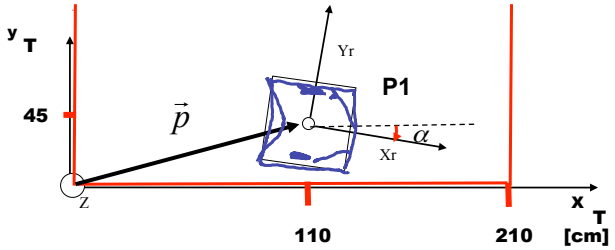
Où est le robot?



2.4.2.8 Matrice de transformation

006.11.20 corr 1 de 2

- Il faut définir deux repères cartésiens, r_{table} et r_{robot}
- La position du robot doit logiquement se donner par rapport à la table
- Il faut exprimer la position et l'orientation de r_{robot} par rapport à r_{table} à l'aide d'une matrice de transformation en coordonnées homogènes (cf. cours p.24)



2.4.2.8 Matrice de transformation

006.11.20 corr 2 de 2

Où est le robot?

$$T_{table}^{robot} = \begin{array}{c} \\ x_t \\ y_t \\ z_t \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_r & y_r & z_r & p_r \end{array} \\ \begin{pmatrix} C355^\circ & -S355^\circ & 0 & 110 \\ S355^\circ & C355^\circ & 0 & 45 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

X

Y

$$\alpha = Arctg_4\left(\frac{xr_{yt}}{xr_{xt}}\right)$$

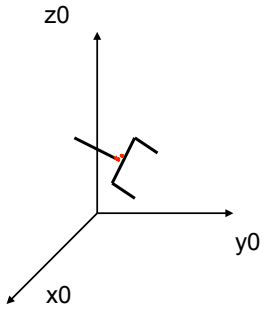
La position et l'orientation du robot sont décrites, à choix, par les 3 coordonnées ou la matrice 4x4 ci-dessus.

Exo 2.3.1 Angles d'Euler et robot

006.04.28b

- Interpréter les coordonnées linéaires et angulaires dans le cas d'un robot positionné ainsi:
- X Y Z Phi Theta Psi

500 400 800 45 120 60



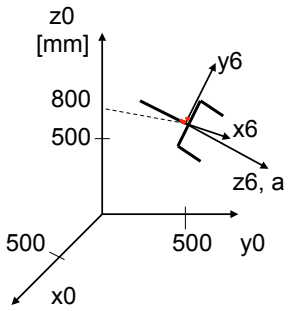
(Theta , phi et psi sont les angles d'Euler au sens strict: ZYZ)

Exo 2.3.1 Angles d'Euler et robot

006.04.28b corr 1 de 2

- Interpréter les coordonnées linéaires et angulaires dans le cas d'un robot positionné ainsi:
- X Y Z Phi Theta Psi

500 400 800 45 120 60



(Theta , phi et psi sont les angles d'Euler au sens strict: ZYZ)

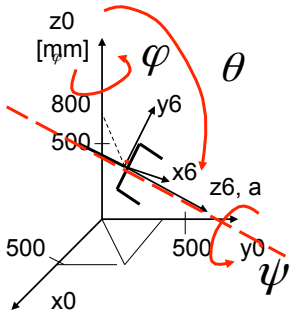
Exo 2.3.1 Angles d'Euler et robot

006.04.28b corr 2 de 2

- Interpréter les coordonnées linéaires et angulaires dans le cas d'un robot positionné ainsi:
- X Y Z Phi Theta Psi

500 400 800 45 120 60

(Theta , phi et psi sont les angles d'Euler au sens strict: ZYZ)



N17.0

2.5.3.1 Solutions cinématiques directe et inverse

Que sont les solutions cinématiques directe et inverse en robotique, et à quoi servent-elles principalement?

N17.0

2.5.3.1 Solutions cinématiques directe et inverse

Que sont les solutions cinématiques directe et inverse ?
corr 1 de 4

En principe, la solution cinématique directe donne la transformation base-outil (matrice du bras; coordonnées cartésiennes ou spatiales) en fonction des coordonnées des moteurs/articulations et paramètres géométriques des éléments du bras.

En principe, la solution cinématique inverse donne les coordonnées des moteurs/articulations en fonction de la transformation base-outil et des paramètres géométriques des éléments du bras.

N17.0

2.5.3.1 Solutions cinématiques directe et inverse

Que sont les solutions cinématiques directe et inverse ? corr 2 de 4

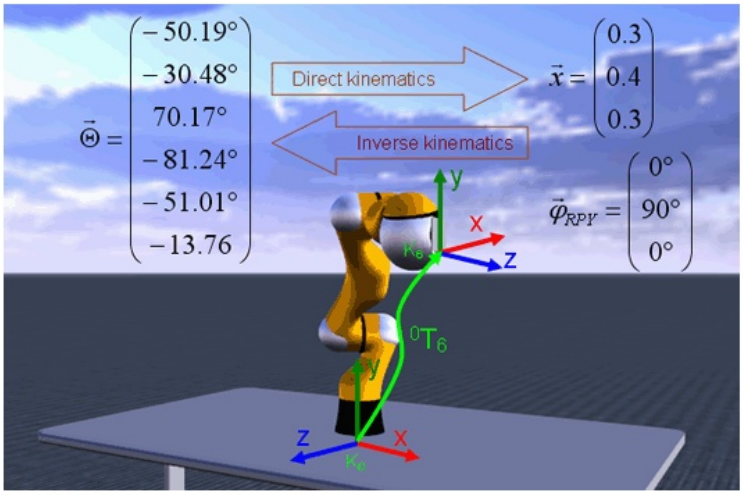


Fig.1: Direct vs. inverse kinematic transformation

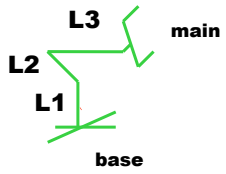
Doc. Kuka

2.5.3.1 Solutions cinématiques directe et inverse

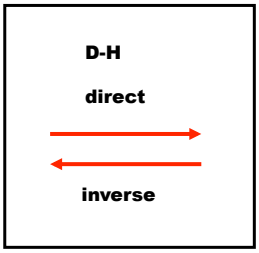
N17.0

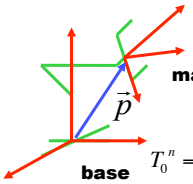
Que sont les solutions cinématiques directe et inverse ? corr 3 de 4

- **Quel est l'état (position et orientation=pose) du robot?**
- **2 vues:**
  - **Caractéristiques propres (artic., géom.; à gauche ci-dessous);**
  - **Repères et transformation (à droite ci-dessous).**
- **La méthode de Denavit-Hartenberg est extrêmement importante, tant pour les systèmes réels qu'en virtuel, pour obtenir la solution cinématique directe dans le cas d'architecture séquentielle (non parallèle).**



Géométrie, variables articulaires, (moteurs)





$$T_0^n = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X, Y, Z, Rz, Ry, Rz

N17.0

2.5.3.1 Solutions cinématiques directe et inverse

A quoi cela sert-il? - corr 4 de 4

En principe, la solution cinématique directe permet *l'affichage graphique* du robot, ainsi que la combinaison ultérieure éventuelle de transformations multiples.

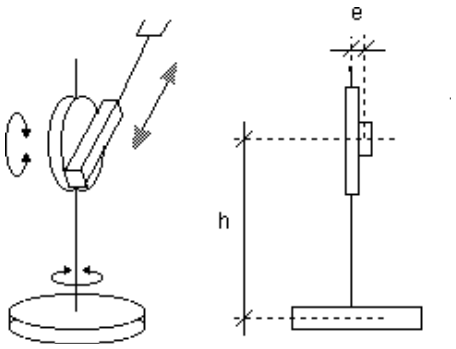
En principe, la solution cinématique inverse donne les coordonnées des moteurs/articulations ce qui est nécessaire à *la commande concrète* des mouvements.

2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

N17

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

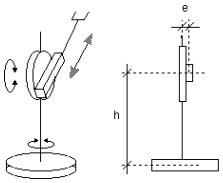
On désire trouver la « matrice du bras », pour le cas présenté dans la fig.ci-dessous. Définir les référentiels de ce bras selon la méthode Denavit-Hartenberg



- ## 2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

N17.1

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Qu'est-ce que la solution cinématique directe?

A La méthode de Denavit-Hartenberg

B Ce qui donne la matrice du bras en fonction des coordonnées moteurs

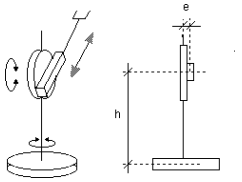
C Ce qui donne les coordonnées spatiales en fonction des coordonnées articulaires

D Ce qui donne les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées spatiales

E Réponses B ou C (ou A, s'il s'agit d'une chaîne cinématique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'axes parallèles)

- 2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H **N17.1**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Qu'est-ce que la solution cinématique directe?

A La méthode de Denavit-Hartenberg

B Ce qui donne la matrice du bras en fonction des coordonnées moteurs

C Ce qui donne les coordonnées spatiales en fonction des coordonnées articulaires

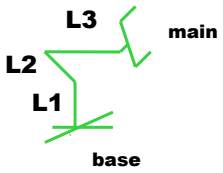
D Ce qui donne les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées spatiales

E Réponses B ou C (ou A, s'il s'agit d'une chaîne cinématique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'axes parallèles)

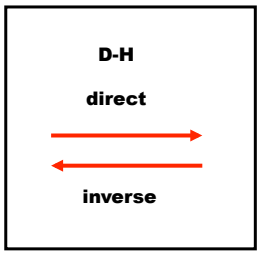
2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

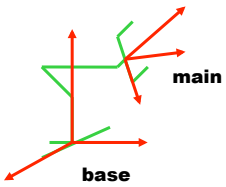
007.01.11, 007.04.24, 007.11.12 Corr , 008.03.18 , 008.10.31 , 009.03.26 , 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04 , 014.11.03

- **La méthode de Denavit-Hartenberg est extrêmement importante tant pour les systèmes réels qu'en virtuel**



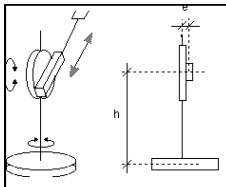
Géométrie, var. articulaires, (moteurs)





$$T_0^n = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

X, Y, Z, Rx, Ry, Rz

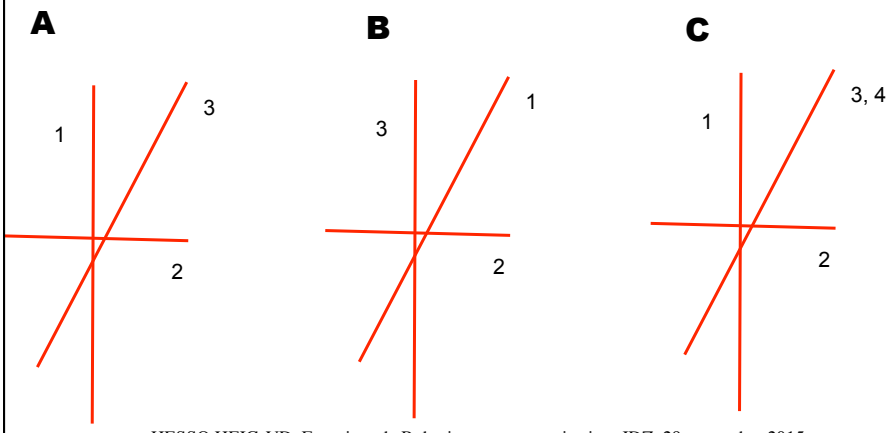


2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

N17.2

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

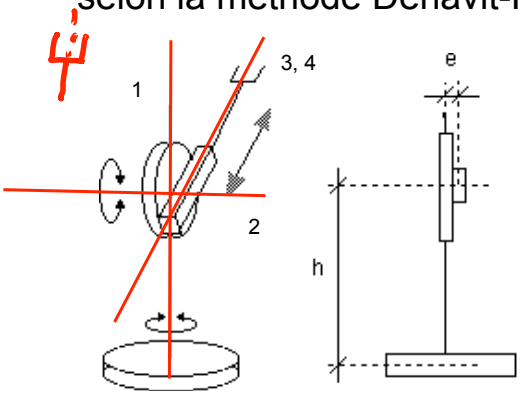
Quels sont les axes i, à définir selon la méthode D-H?



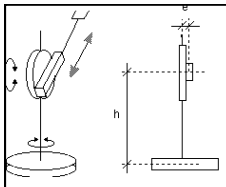
2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H corr

007.01.11, 007.04.24 , 007.11.13 , 008.03.18 , 008.10.31 , 009.03.26 , 009.10.27 , 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04 , 014.11.03

- On désire trouver la matrice du bras présenté dans la fig.. Définir les référentiels de ce bras selon la méthode Denavit-Hartenberg



A: Les axes de mouvement 1, 2 et 3 correspondent respectivement aux deux premières rotations puis à l'articulation prismatique. Enfin l'axe 4 est dans la direction d'approche du préhenseur

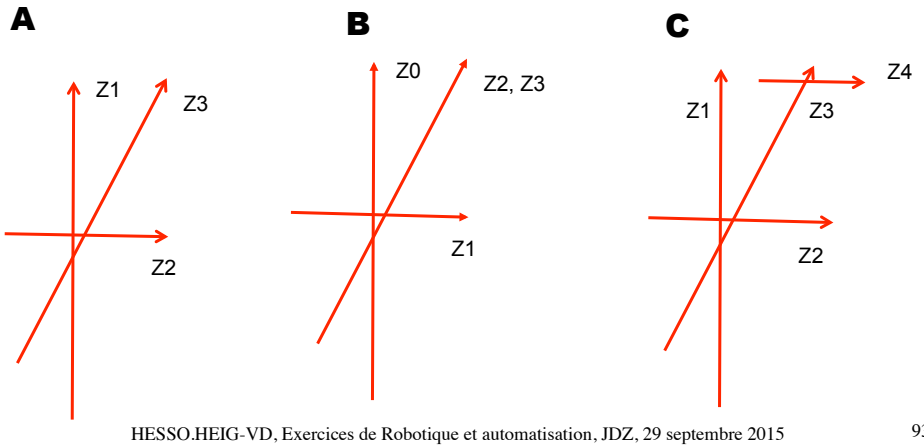


2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

N17.3

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

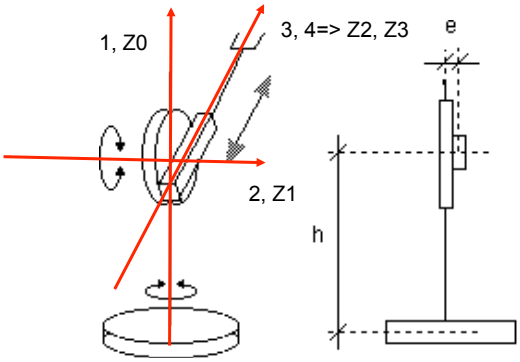
Quels sont les axes z_i, selon la méthode D-H?



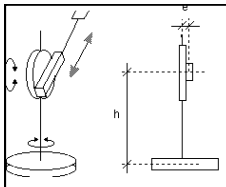
2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H corr

007.01.11, 007.04.24 , 007.11.13 , 008.03.18 , 008.10.31 , 009.03.26, 009.10.27 , 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04 , 014.11.03

- On désire trouver la matrice du bras présenté dans la fig.. Définir les référentiels de ce bras selon la méthode Denavit-Hartenberg



B1: Les axes de mouvement 1, 2, 3 et 4 donnent naturellement les axes Z0, Z1, Z2, et Z3, respectivement

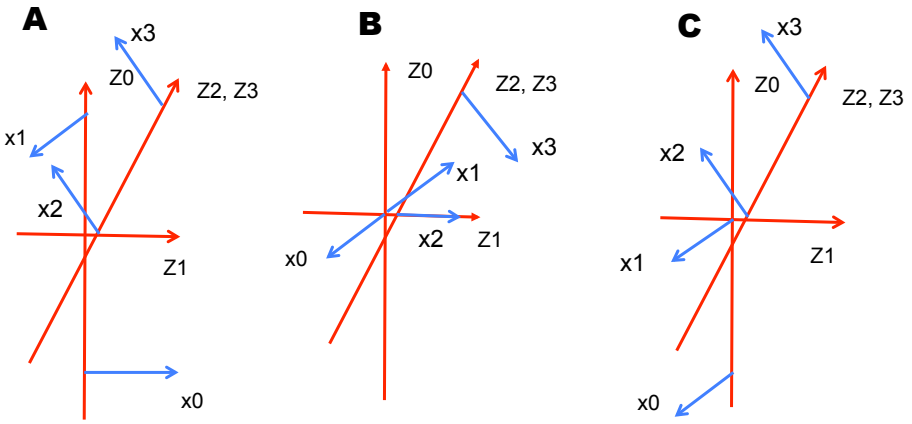


2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

N17.4

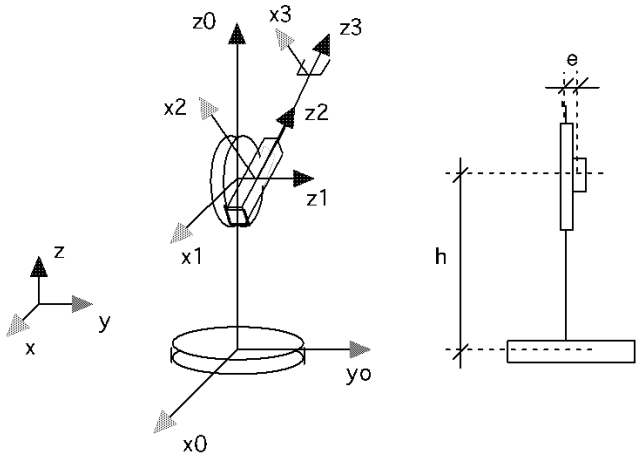
007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

Quels sont les axes x_i, selon la méthode D-H?

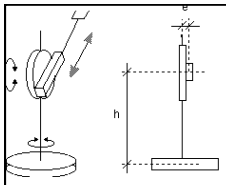


2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H corr

007.01.11, 007.04.24, 007.11.13 , 008.03.18 , 008.10.31 , 009.03.26, 009.10.27 , 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04 , 014.11.03



B2: Les axes Xi sont sur une normale commune à Zi-1 et à Zi, pointant loin de Zi-1

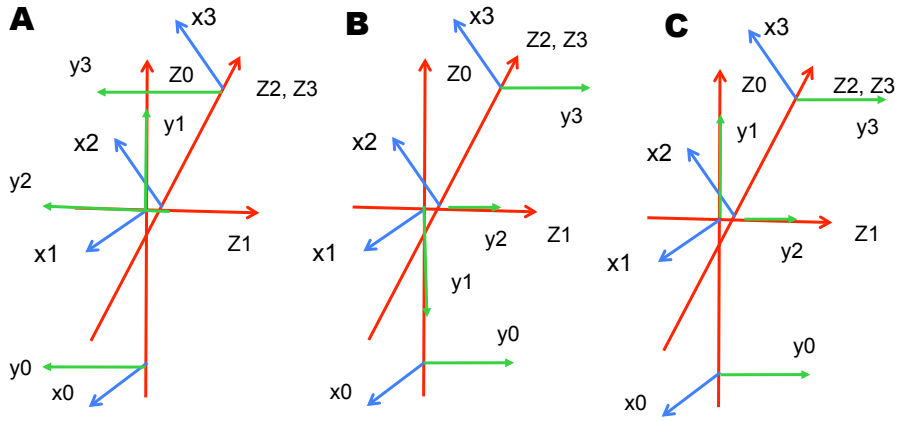


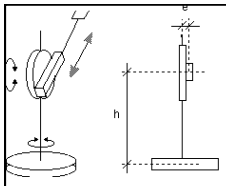
2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

N17.5

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

Quels sont les axes y_i, selon la méthode D-H?



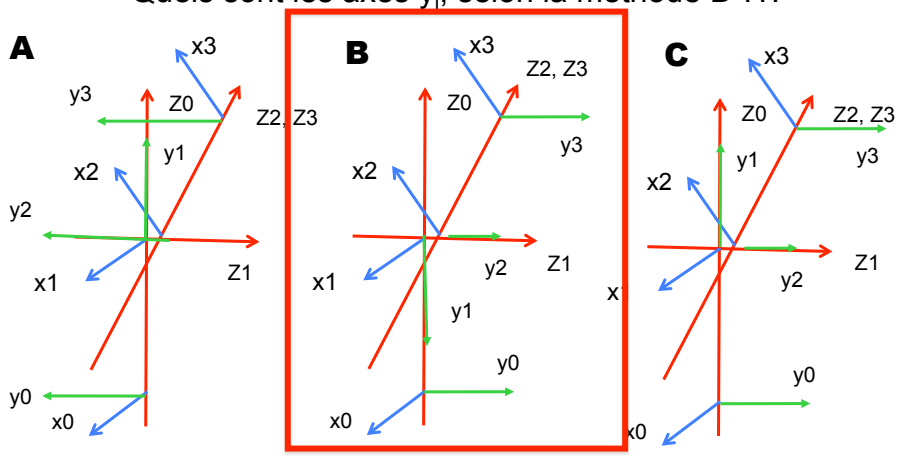


2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

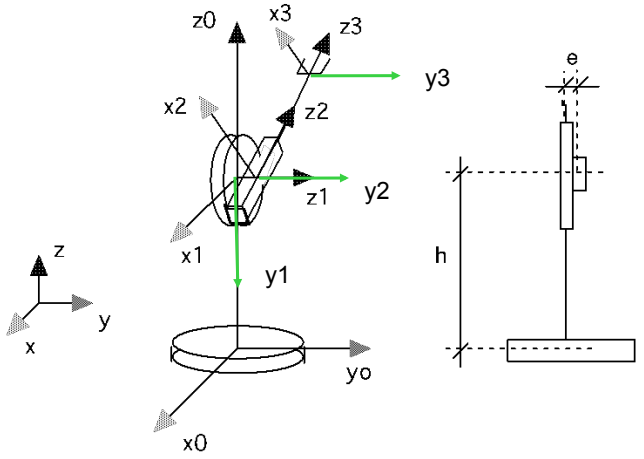
N17.5

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

Quels sont les axes y_i, selon la méthode D-H?



2.5.3.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H corr 007.01.11, 007.04.24, 007.11.13 , 008.03.18 , 008.10.31 , 009.03.26, 009.10.27 , 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04 , 014.11.03

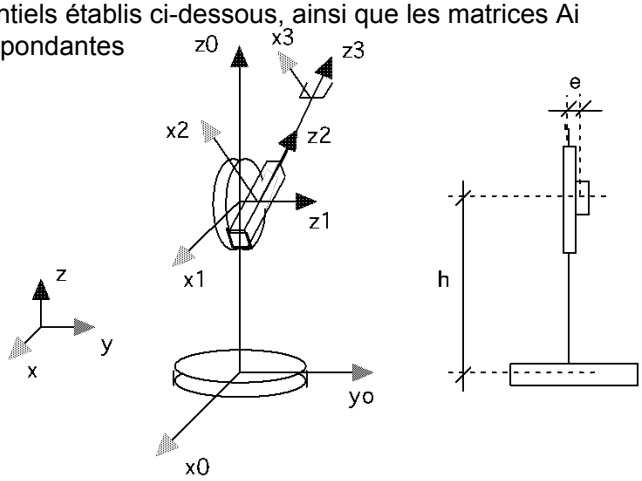


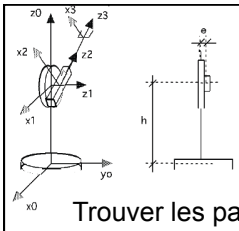
B3: Les axes Yi complètent les repères (par ex.: dévisser Zi)

N18

2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H 007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03, 015.11.03

- Trouver les paramètres θi, di, ai, et αi de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



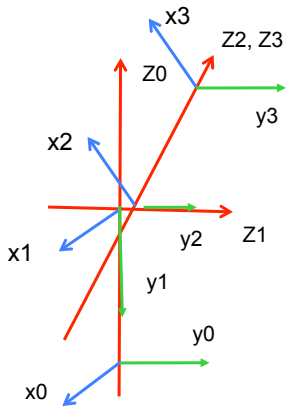


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

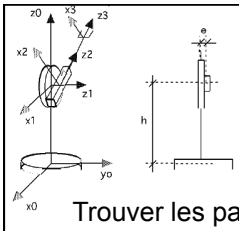
N18.1

007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Trouver les paramètres θi, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



	articulation 1	2	3
A	thetai 0°	0°	300°
B	thetai var:θ1 (0°)	var:θ2 (60°)	0°
C	thetai var:θ1 (0°)	var:θ2 (300°)	0°

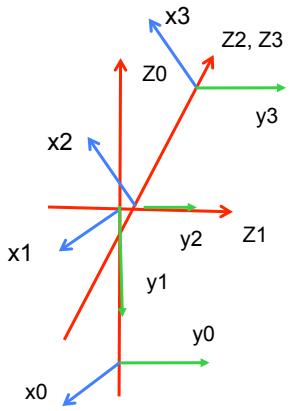


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

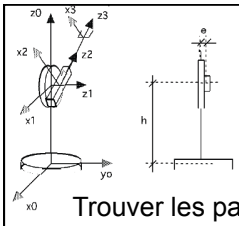
N18.1

007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Trouver les paramètres θi, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



	articulation 1	2	3
A	thetai 0°	0°	300°
B	thetai var:θ1 (0°)	var:θ2 (60°)	0°
C	thetai var:θ1 (0°)	var:θ2 (300°)	0°

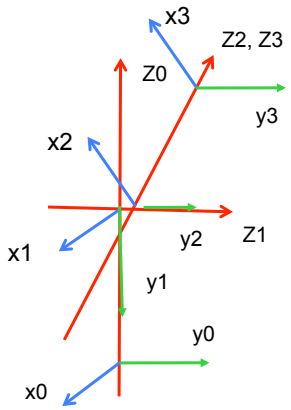


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H 007.01.11,

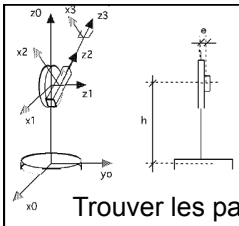
N18.2

007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Trouver les paramètre di, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



	articulation	1	2	3
A	di	e	h	300
B	di	h	e	var:d3
C	di	300	e	h

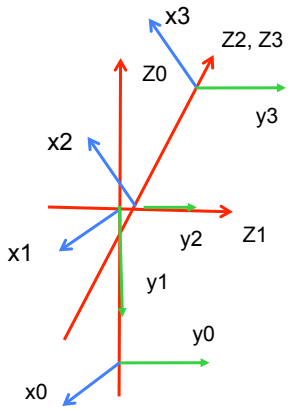


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H 007.01.11,

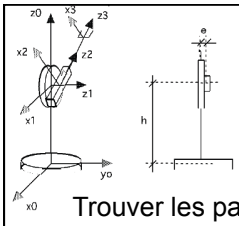
N18.2

007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Trouver les paramètre di, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



	articulation	1	2	3
A	di	e	h	300
B	di	h	e	var:d3
C	di	300	e	h

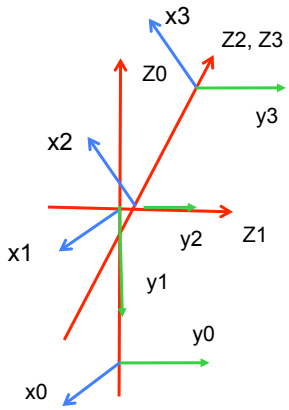


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H 007.01.11,

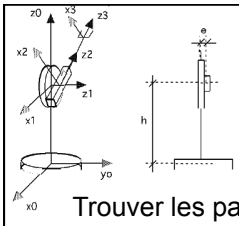
N18.3

007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Trouver les paramètre ai, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



	articulation	1	2	3
A	ai	e	h	300
B	ai	h	e	var:d3
C	ai	0	0	0

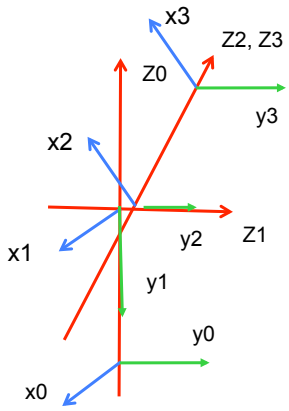


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H 007.01.11,

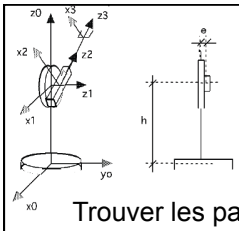
N18.3

007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Trouver les paramètre ai, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



	articulation	1	2	3
A	ai	e	h	300
B	ai	h	e	var:d3
C	ai	0	0	0

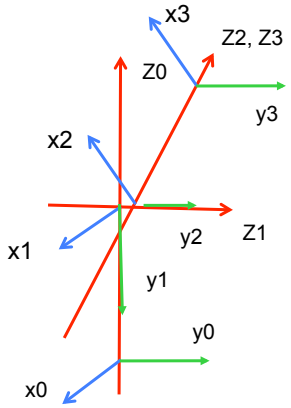


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

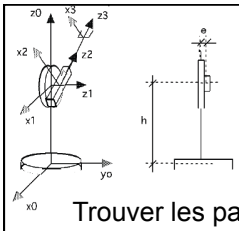
N18.4

007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Trouver les paramètres αi, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes



	articulation 1	2	3
A	alphai 270°	90°	0°
B	alphai var:α1 (0°)	var:α3 (60°)	0°
C	alphai 0°	0°	300°

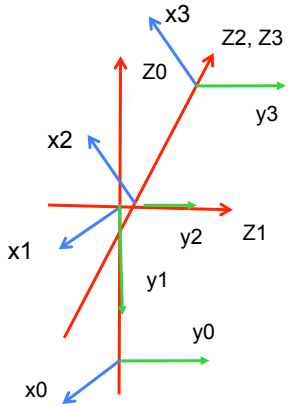


2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

N18.4

007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

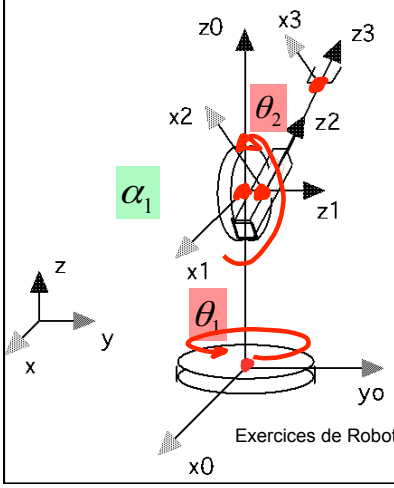
Trouver les paramètres αi, de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices Ai correspondantes

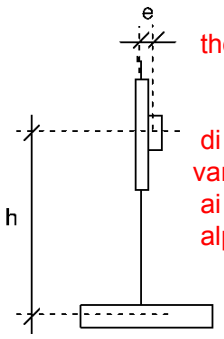


	articulation 1	2	3
A	alphai 270°	90°	0°
B	alphai var:α1 (0°)	var:α3 (60°)	0°
C	alphai 0°	0°	300°

2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H corr, 007.01.11, 007.05.01 , 008.03.18 , 008.10.31, 009.04.23, 009.10.27 , 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.03, 012.11.09

- Trouver les paramètres θi, di, ai, et αi de D-H correspondant aux référentiels établis ci-dessous, ainsi que les matrices A_{i-1}^{i} correspondantes





articulation	1	2	3
thetai	var:θ1 (0°)	var:θ2 (300°)	0°
di	h	e	
var:d3			
ai	0	0	0
alphai	270°	90°	0°

articulation	1	2	3
thetai	var:θ1 (0°)	var:θ2 (300°)	0°
di	h	e	
var:d3			
ai	0	0	0
alphai	270°	90°	0°

2.5.4.1 Solution cinématique directe / matrices D-H 007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03 N18.5

Report des paramètres dans les matrices des éléments, cas de la première articulation?

A

$$A_0^{\,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B

$$A_0^{\,1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C

$$A_0^{\,1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

articulation	1	2	3
thetai	var:θ1 (0°)	var:θ2 (300°)	0°
di	h	e	var:d3
ai	0	0	0
alphai	270°	90°	0°

2.5.4.1 Solution cinématique directe / matrices D-H

N18.5

007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Report des paramètres dans les matrices des éléments, cas de la première articulation?

A

$$A_0^{\ 1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B

$$A_0^{\ 1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & -C\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C

$$A_0^{\ 1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

corr., 007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18 , 008.10.31, 009.04.23 , 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.03, 012.11.09

- Report des paramètres dans les matrices des éléments

articulation	1	2	3
thetai	var	var	0°
di	h	e	var
ai	0	0	0
alphai	-90°	90°	0°

$$A_{i-1}^{\ \ i} = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i \cdot S\theta_i & S\alpha_i \cdot S\theta_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i \cdot C\theta_i & -S\alpha_i \cdot C\theta_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_0^{\ 1} = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{\ 2} = \begin{pmatrix} C\theta_2 & 0 & S\theta_2 & 0 \\ S\theta_2 & 0 & -C\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

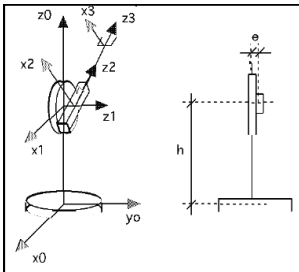
2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H corr., 007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18 , 008.10.31, 009.04.23 , 010.11.08, 011.03.31, 011.11.03, 012.11.09

- Report des paramètres dans les matrices des éléments

$$A_{i-1}{}^{i} = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i \cdot S\theta_i & S\alpha_i \cdot S\theta_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i \cdot C\theta_i & -S\alpha_i \cdot C\theta_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

articulation	1	2	3
thetai	var	var	0°
di	h	e	var
ai	0	0	0
alphai	-90°	90°	0°

$$A_2{}^{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



2.5.4.1 Solution cinématique directe / matrices D-H 007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03 N18.6

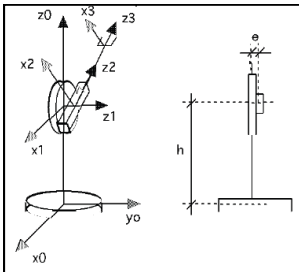
Et comment calculer la matrice du bras?

A $T_0{}^{3} = A_0{}^{1} \cdot A_1{}^{2} \cdot A_2{}^{3}$

B $T_0{}^{3} = A_2{}^{3} \cdot A_1{}^{2} \cdot A_0{}^{1}$

C $T_0{}^{3} = A_3{}^{2} \cdot A_2{}^{1} \cdot A_1{}^{0}$

D $T_0{}^{3} = A_0{}^{1} \cdot A_0{}^{2} \cdot A_0{}^{3}$



2.5.4.1 Solution cinématique directe / matrices D-H

N18.6

007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18, 008.10.31, 009.03.26, 009.10.27, 010.11.08 , 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.11.04, 014.11.03

Et comment calculer la matrice du bras?

A $T_0^{\,3} = A_0^{\,1} \cdot A_1^{\,2} \cdot A_2^{\,3}$

B $T_0^{\,3} = A_2^{\,3} \cdot A_1^{\,2} \cdot A_0^{\,1}$

C $T_0^{\,3} = A_3^{\,2} \cdot A_2^{\,1} \cdot A_1^{\,0}$

D $T_0^{\,3} = A_0^{\,1} \cdot A_0^{\,2} \cdot A_0^{\,3}$

2.5.4.1 Solution cinématique directe / référentiels D-H

corr., 007.01.11, 007.05.01, 007.11.13 , 008.03.18 , 008.10.31, 009.04.23 , 010.11.08, 011.03.31, 011.11.03, 012.11.09

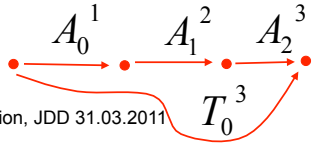
- Report des paramètres dans les matrices des éléments

$$A_{i-1}^{\;\;i} = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i \cdot S\theta_i & S\alpha_i \cdot S\theta_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i \cdot C\theta_i & -S\alpha_i \cdot C\theta_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

articulation	1	2	3
thetai	var	var	0°
di	h	e	var
ai	0	0	0
alphai	-90°	90°	0°

$$A_2^{\,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0^{\,3} = A_0^{\,1} \cdot A_1^{\,2} \cdot A_2^{\,3}$$

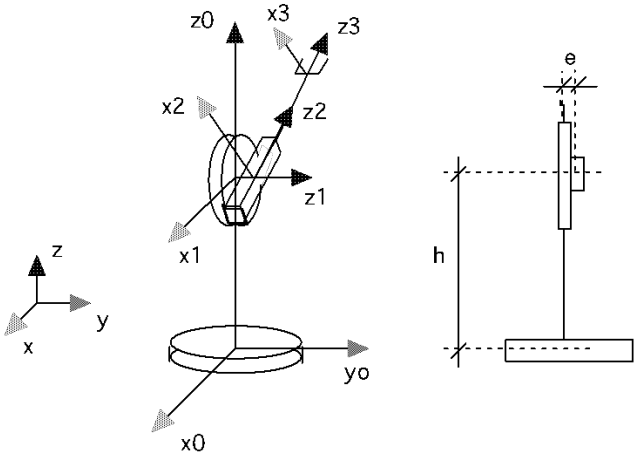


2.6.2.1Solution cinématique inverse

N19

007.01.25, 007.11.13, 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.08, 011.11.03, 012.11.09, , 013.11.04, 014.11.07

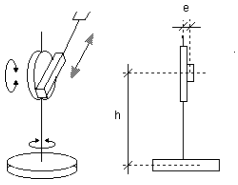
1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme (dans un premier temps, prendre e=0).



- ## 2.5.3.1 Solution cinématique inverse

N19.1

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Qu'est-ce que la solution cinématique inverse?

A La méthode de Denavit-Hartenberg

B Ce qui donne la matrice du bras en fonction des coordonnées moteurs

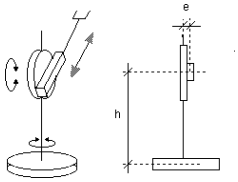
C Ce qui donne les coordonnées spatiales en fonction des coordonnées articulaires

D Ce qui donne les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées spatiales

- 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.1**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

Corr



Qu'est-ce que la solution cinématique inverse?

A La méthode de Denavit-Hartenberg

B Ce qui donne la matrice du bras en fonction des coordonnées moteurs

C Ce qui donne les coordonnées spatiales en fonction des coordonnées articulaires

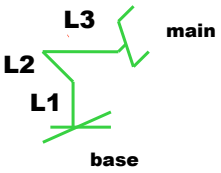
D Ce qui donne les coordonnées articulaires en fonction des coordonnées spatiales

2.6.2.1Solution cinématique inverse

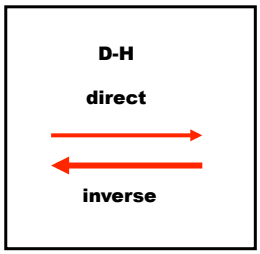
007.01.25, 007.11.13, 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, , 012.11.09,013.11.05

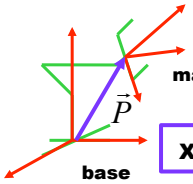
Corr 1 de 17

- **Le problème cinématique inverse vise à déterminer les coordonnées articulaires (coordonnées moteurs) sur la base essentiellement des coordonnées spatiales décrivant l'extrémité mobile (main, outil) par rapport à la base.**



Géométrie, var. articulaires, (moteurs)



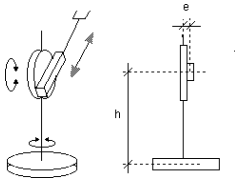


X, Y, Z, Rx, Ry, Rz

$$T_0^n = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.2**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Quelles coordonnées cherche-t-on?

A θ1, θ2, θ3

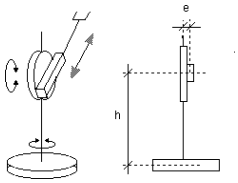
B X, Y, Z

C d1, θ2, θ3

D θ1, θ2, d3

- 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.2**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Quelles coordonnées cherche-t-on?

A θ1, θ2, θ3

B X, Y, Z

C d1, θ2, θ3

D θ1, θ2, d3

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13, 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, , 012.11.09 Corr 2 de 17

- Données:

  T_0^3

(en particulier, px, py, et pz dans la 4ième colonne décrivent où est la pince)

- Inconnues à trouver:

  θ1, θ2, et d3

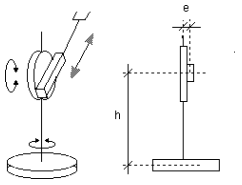
$$T_0^3 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Résultat cherché:
θ1, θ2, d3.

Pour résoudre ce problème, la démarche est surtout intuitive, basée sur des considérations géométriques. Il faut introduire des variables intermédiaires et, en particulier, faire apparaître des triangles.

• 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.3**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Que faire pour le cas où l'on aurait plus que 3 ddl?

A Résoudre le cas du premier ddl

B Calculer la position du poignet :

$$\vec{p}' = \vec{p} - d \cdot \vec{a}$$

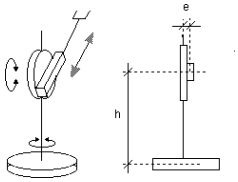
C Résoudre le cas du dernier ddl

D Calculer la position du poignet :

$$\vec{p}' = \vec{p} + d \cdot \vec{a}$$

- 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.3**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Que faire pour le cas où l'on aurait plus que 3 ddl?

A Résoudre le cas du premier ddl

B Calculer la position du poignet :
$$\vec{p}' = \vec{p} - d \cdot \vec{a}$$

C Résoudre le cas du dernier ddl

D Calculer la position du poignet :
$$\vec{p}' = \vec{p} + d \cdot \vec{a}$$

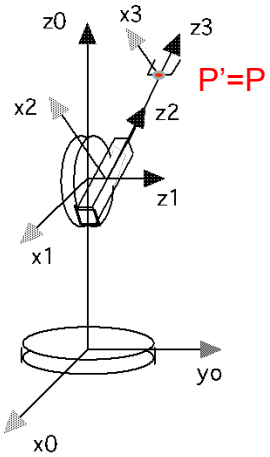
2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13, 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, , 012.11.09 Corr 3 de 17

P' ? Deux remarques, A puis B.

A. En général, P' vise à séparer le problème typiquement à 6 ddl en deux problèmes à 3 ddl: grâce à P' , fixé sur le point de rencontre des 3 derniers axes de rotation, on peut d'abord se concentrer sur le positionnement du poignet, résoudre les 3 premiers ddl, puis traiter les ddl 4 à 6 par la suite.

Ici nous n'avons que 3 ddl, et dès lors le point P suffit. P'=P.



2.6.2.1Solution cinématique inverse

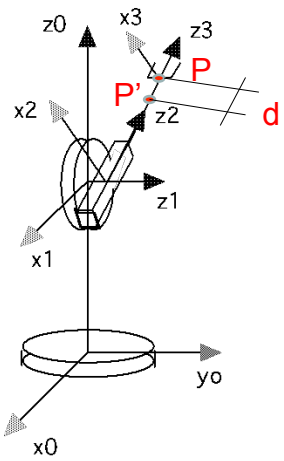
007.01.25, 007.11.13, 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.09, Corr 4 de 17

P' ? Deux remarques, A puis B (suite)

B. Si, malgré le point A, on veut absolument un point P' sur le poignet comme dans la solution générale, on peut imaginer celui-ci à une certaine distance d du point P.

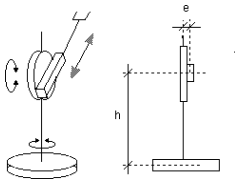
$$\vec{p}' = \vec{p} - d \cdot \vec{a} = \vec{p} - d \cdot \vec{z}_3$$

Et pourquoi pas d=0?



- ## 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.4**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Cas 1: e=0

Que vaut θ1 ?

A 0 degrés

B θ1 = Arc tg4 (py/px)

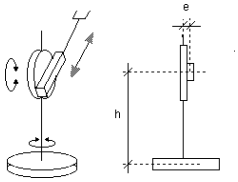
C Valeur non définie

D θ1 = Arctg4 ((pz-h)/rh)

avec $rh = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

- 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.4**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Cas 1: e=0

Que vaut θ1 ?

A 0 degrés

B θ1 = Arc tg4 (py/px)

C Valeur non définie

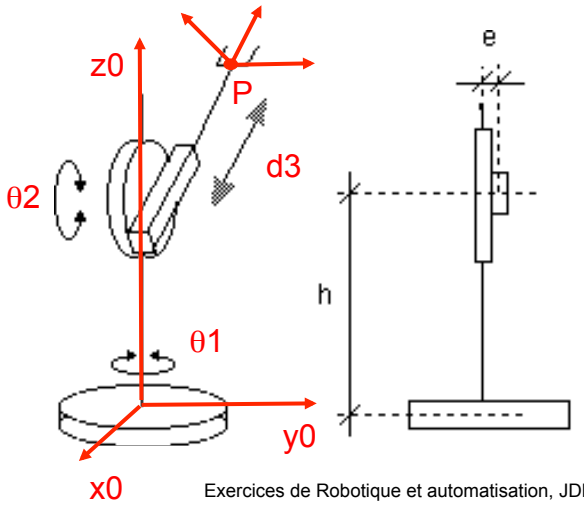
D θ1 = Arctg4 ((pz-h)/rh)

avec $rh = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13 Corr 5 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.09

1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme.



- Données:

  T_0^3

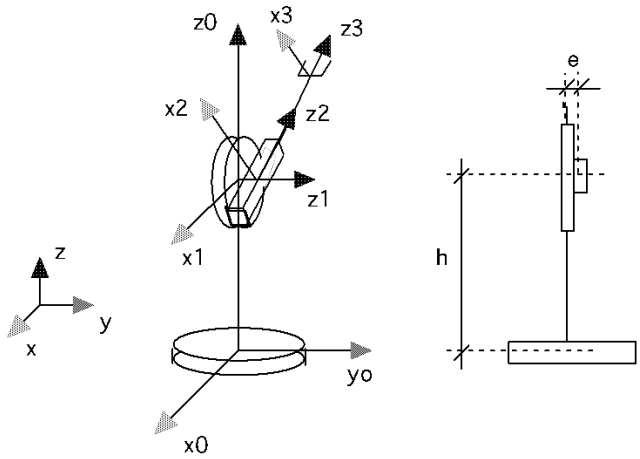
(en particulier, px, py, et pz dans la 4ième colonne décrivent où est la pince)

- Inconnues à trouver: θ1, θ2, et d3

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13, Corr 6 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.09

1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme.



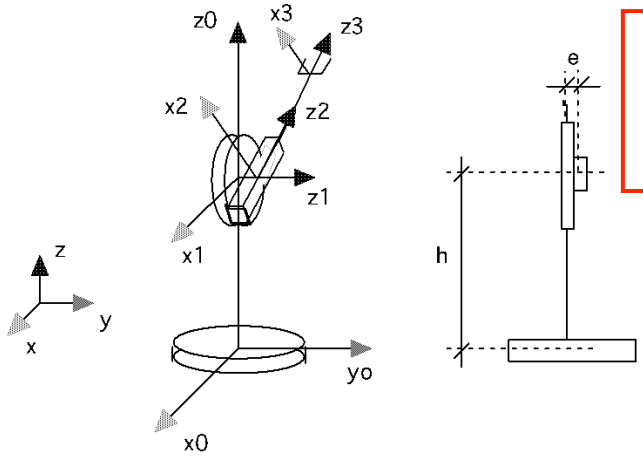
A. Dans un premier temps, choisir e=0

B. Refaire pour e non nul

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13, Corr 7 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.09

1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme.

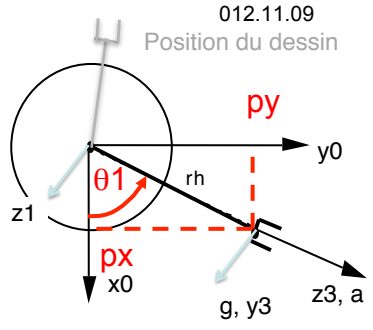


A. Dans un premier temps, choisir e=0

B. Refaire pour e non nul

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.19 Corr 8 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.09



autre position pour faciliter le raisonnement

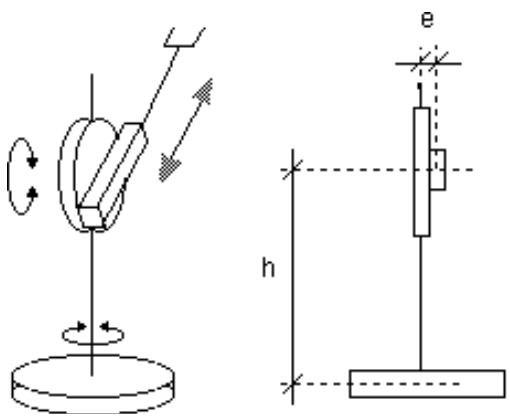
$$rh = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \qquad \textbf{(1)}$$

(voir px et py dans la matrice du bras; rh: projection horizontale du bras)

θ1 = Arc tg4 (py/px) **(2)**

- ## 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N19.4b**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



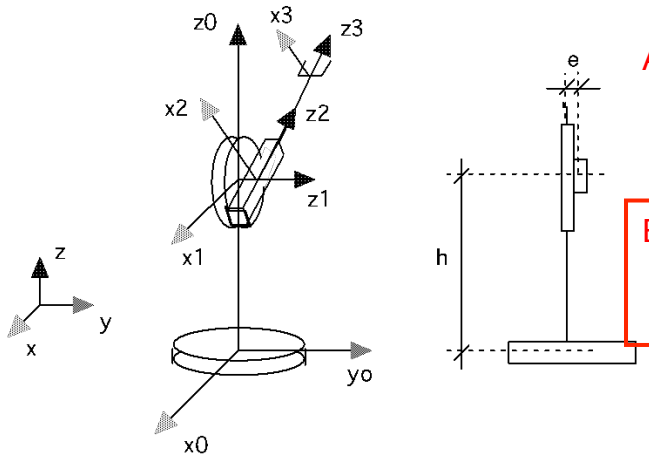
Cas 2: e<>0

Que vaut θ1 ?

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13, Corr 9 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09

1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme.



A. Dans un premier temps, choisir e=0 cf. exo précédent

B. Refaire maintenant pour e non nul

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.19 Corr 10 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.11

$$T_0^3 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0)$$

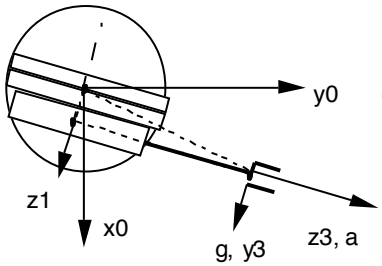
Résultat cherché: θ1, …

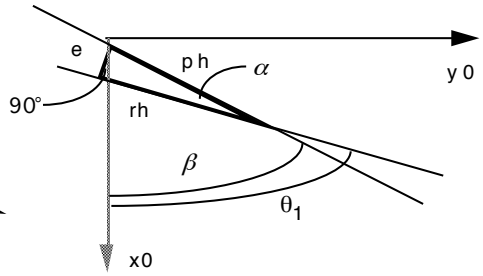
Pour résoudre ce problème, la démarche est surtout intuitive, basée sur des considérations géométriques. Il faut introduire des variables intermédiaires et, en particulier, faire apparaître des triangles.

Voyons le système depuis dessus, et considérons un triangle horizontal passant par z1.

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25 , 007.11.19 Corr 11 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09





$$ph = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$$ (1)

(voir px et py dans la matrice donnée)
La grandeur "e" est constante, fixée par la construction.

$$rh = \sqrt{ph^2 - e^2}$$ (2)

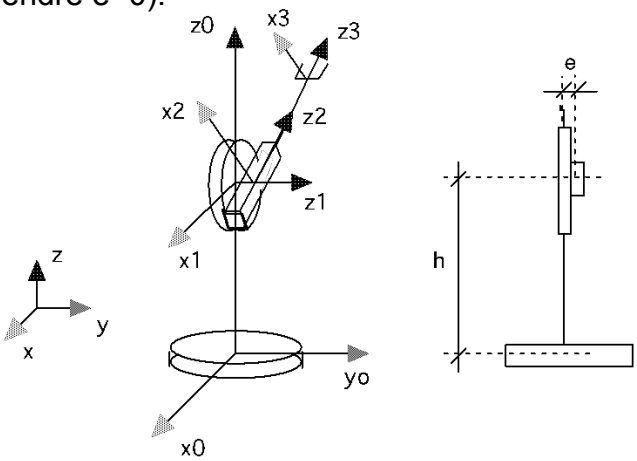
α = f (ph, e, rh): e2= ph2+rh2- 2 ph rh cos α (3)
α = Arc cos ((e2- ph2-rh2)/ 2 ph rh) (3')
β = Arc tg4 (py/px) (4)
θ1 = α + β

2.6.2.1Solution cinématique inverse

N19.5

007.01.25, 007.11.13, 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.08, 011.11.03, 012.11.09, , 013.11.04

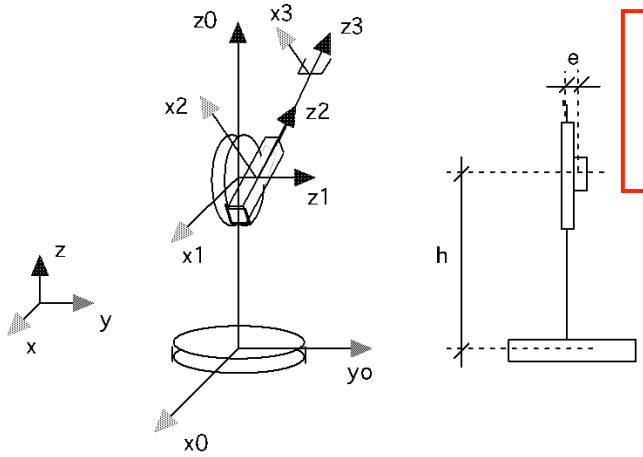
1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme, pour les 2 coordonnées restantes, θ2 et d3 (dans un premier temps, prendre e=0).



2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13, Corr 12 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.09

1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme.



A. Dans un premier temps, choisir e=0

B. Refaire pour e non nul

2.6.2.1Solution cinématique inverse

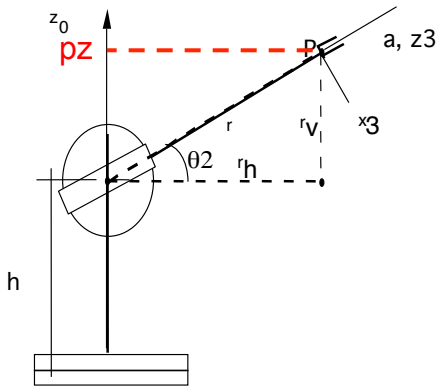
007.01.25 , 007.11.19 Corr 13 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09

Pour trouver θ2 et d3, on considère un autre triangle, vertical, perpendiculaire à l'axe de rotations 2 (voir fig. ci-dessous).

rv = pz - h (voir pz dans matrice et h: connu) (6)

θ2 = Arctg4 (rv/rh) (voir rh dans équ.1: $rh = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$) (7)

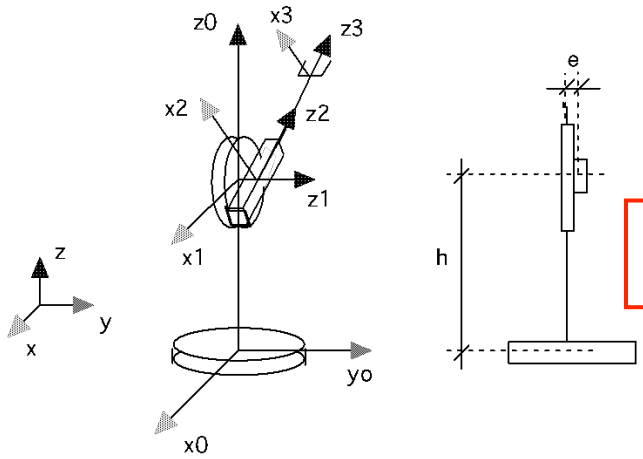
$$d_3 = r = \sqrt{rh^2 + rv^2}$$



2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.13, Corr 14 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09

1. Donner la solution cinématique inverse pour ce mécanisme.



A. Dans un premier temps, choisir e=0

B. Refaire pour e non nul

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25, 007.11.19 Corr 15 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 012.11.11

$$T_0^3 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0)$$

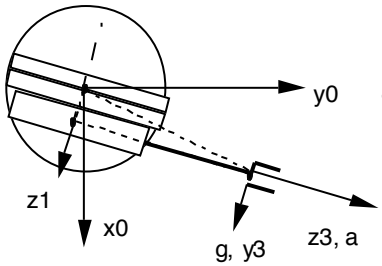
Résultat cherché: θ1, θ2, d3.

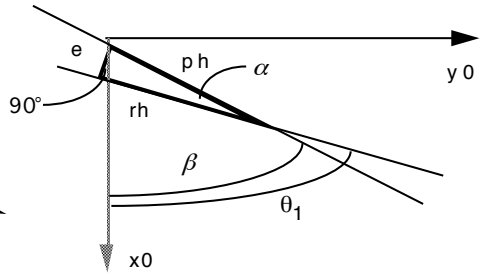
Pour résoudre ce problème, la démarche est surtout intuitive, basée sur des considérations géométriques. Il faut introduire des variables intermédiaires et, en particulier, faire apparaître des triangles.

Voyons le système depuis dessus, et considérons un triangle horizontal passant par z1.

2.6.2.1Solution cinématique inverse

007.01.25 , 007.11.19 Corr 16 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09





$$ph = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (1)$$

(voir px et py dans la matrice donnée)
La grandeur "e" est constante, fixée par la construction.

$$rh = \sqrt{ph^2 - e^2} \quad (2)$$

α = f (ph, e, rh): e2= ph2+rh2- 2 ph rh cos α (3)
α = Arc cos ((e2- ph2-rh2)/ 2 ph rh) (3')
β = Arc tg4 (py/px) (4)
θ1 = α + β

2.6.2.1Solution cinématique inverse

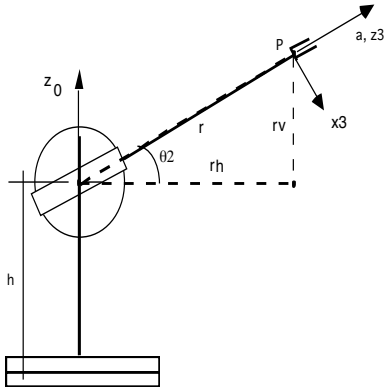
007.01.25 , 007.11.19 Corr 17 de 17 , 008.11.07, 009.11.02 , 010.11.09, 013.11.05

Pour trouver θ2 et d3, on considère un autre triangle, vertical, perpendiculaire à l'axe de rotations 2 (voir fig. ci-dessous).

rv = pz – h (6)
(voir pz dans équ. "0", et h: connu)

θ2 = Arctg4 (rv/rh) (7)
(voir rh dans équ.1 et 2)

$$d_3 = r = \sqrt{rh^2 + rv^2} \quad (8)$$



2…Solution cinématique directe pour robot mobile (RM)

Donner le principe de la solution cinématique directe pour un robot mobile à deux roues actives, tel que Dark18 par exemple.

2…Solution cinématique directe (RM)

corr., 011.11.08

La méthode AMIGUET consiste à agir en trois temps, à passer par des coordonnées intermédiaires : θ_1,d_2 et θ_3 pour assurer ainsi un déplacement en ligne droite.

Dès lors trois sous-problèmes apparaissent:

- les «micro»-problèmes:
  1. pour le mouvement linéaire: θ_g, θ_d=> d_x
  2. pour les mouvements rotatifs: θ_g, θ_d=> θ_z
- le «macro»-problème:

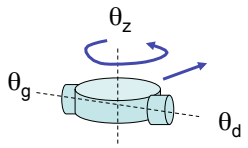
  θ_1,d_2 et θ_3 => T_0^3 ; utiliser la méthode D-H.

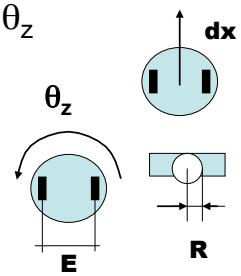
2…Solution cinématique directe (RM)

005.12.16,, 011.11.08

Donner la solution cinématique directe pour les «micro»-problèmes dans le cas d'un robot mobile (cf. méthode Amiguet 98):

1. mouvement linéaire: θ_g, θ_d=> d_x
2. mouvement rotatif: θ_g, θ_d=> θ_z





2…Solution cinématique directe 005.12.09, 011.11.08, corrigé 1 de 2

Cas 1: Solution directe, déplacement linéaire :

Données : $\theta_d = \theta_g$; 2 roues (coordonnées articulaires; grandeur géométrique: rayon de roue R)

Résultat recherché :dx (coordonnée spatiale)

$$dx = R \cdot \theta_d$$

$$T_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & R\theta_d \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2…Solutions cinématiques005.12.09, 011.11.08 corrigé 2 de 2

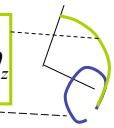
Cas 2: Solution directe, déplacement angulaire :

Données : $\theta_d = -\theta_g$; 2 roues (coordonnées articulaires;

grandeurs géométriques: rayon de roue R, entraxe E)

Résultat recherché : θ_z (coordonnée spatiale)

$$R \cdot \theta_d = \frac{E}{2}\theta_z$$



$$\theta_z = \frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}$$

$$T_{12} = \begin{pmatrix} Cos\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & -Sin\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & 0 & 0 \\ Sin\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & Cos\left(\frac{2 \cdot R \cdot \theta_d}{E}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2…Solution cinématique directe (RM)

005.12.16,, 011.11.08

Donner la solution cinématique directe pour le «macro»-problème dans le cas d'un robot mobile (cf. méthode Amiguet 98):

θ_1, d_2 et θ_3 => T_0^3

2…Solution cinématique directe 005.12.16

corrigé 1 de 4, 011.11.08

Les trois mouvements correspondent à une chaîne cinématique virtuelle à 3ddl et on utilise la méthode D-H:

A) Identifier les axes de mouvements :
voir ce qui est en vert

B) Définir les repères d'articulation :
on compte depuis la base (voir en rouge)

$$z_{i-1} = axe\ i$$

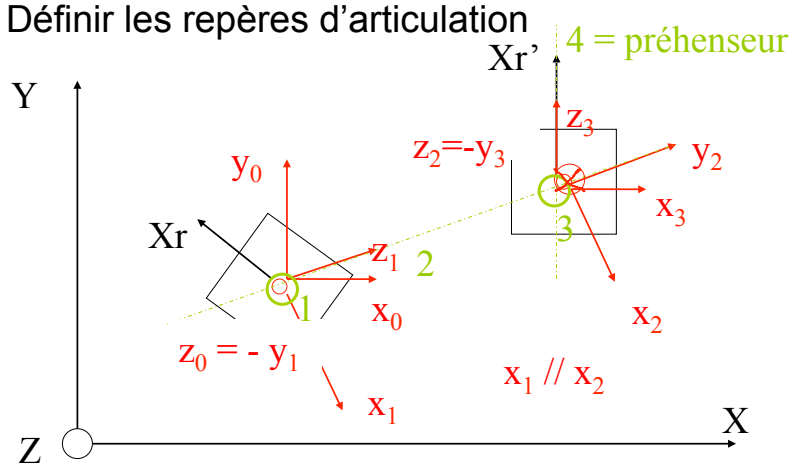
$$x_i = \perp\ à\ z_{i-1}\ et\ z_i\ ,\ allant\ loin\ de\ z_{i-1}$$

$$y_i = complète\ le\ système$$

2…Solution cinématique directe

005.12.16 corrigé 2 de 4

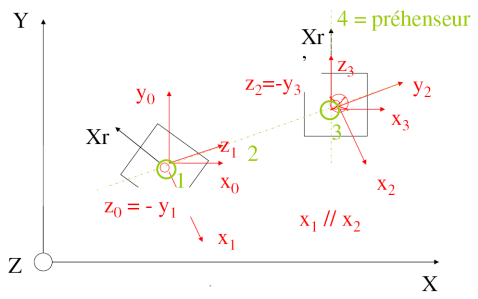
B) Définir les repères d'articulation



2…Solution cinématique directe

005.12.16 corrigé 3 de 3

C) Identification des paramètres D-H



$$f(z_{i-1}) = \begin{cases} \theta_i : \angle \quad x_{i-1} \rightarrow x_i \\ d_i : \; dist \;\; O_{i-1} \rightarrow O_i \end{cases}$$

$$f(x_i) = \begin{cases} a_i : \; dist \quad O_{i-1} \rightarrow O_i \\ \alpha_i : \angle \;\; z_{i-1} \rightarrow z_i \end{cases}$$

	1	2	3
θ	$\theta_1 \cong 280°$ (variable)	0	$\theta_3 \cong 80°$ (variable)
d	0	$d_2 \cong 7\,[cm]$ (variable)	0
a	0	0	0
α	270°	90°	270°

2…Solution cinématique directe

005.12.16 corrigé 4 de 4

D) Report des paramètres dans la matrice permettant le passage d'un élément au suivant :

$$A_{i-1}{}^{i} = \begin{pmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i \cdot S\theta_i & S\alpha_i \cdot S\theta_i & a_i \cdot C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i \cdot C\theta_i & -S\alpha_i \cdot C\theta_i & a_i \cdot S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_0{}^1 = \begin{pmatrix} C\theta_1 & 0 & -S\theta_1 & 0 \\ S\theta_1 & 0 & C\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_2{}^3 = \begin{pmatrix} C\theta_3 & 0 & -S\theta_3 & 0 \\ S\theta_3 & 0 & C\theta_3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

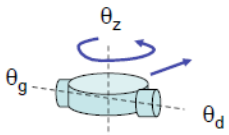
E) Matrice du bras: $T_0{}^n = A_0{}^1 \cdot A_1{}^2 \cdot A_2{}^3$

2…Solution cinématique inverse pour robot mobile (RM) N20

Donner le principe de la solution cinématique inverse pour un robot mobile à deux roues actives, tel que Dark18 par exemple.

- 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N20.1**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03



Donner le principe de la solution cinématique inverse pour un robot mobile à deux roues actives, tel que Dark18 par exemple

A passer par des coordonnées intermédiaires : θ_1,d_2 et θ_3 pour assurer ainsi un déplacement en ligne droite

B mouvement linéaire: θ_g, θ_d=> d_x

C pour les mouvements rotatifs: θ_g, θ_d=> θ_z

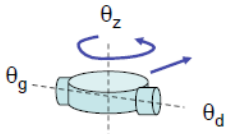
D θ_1,d_2 et θ_3 => T_0^3 ; utiliser la méthode D-H

E Utiliser la méthode Amiguet (iAi-LaRA 1998)

- 2.5.3.1 Solution cinématique inverse **N20**

007.01.11, 007.04.24, 007.11.12, 008.03.18, 008.10.31, RVO009.03.26, 009.10.27, 010.11.02, 011.03.31, 011.11.01, 012.11.09, 013.10.29, 014.04.07 , 014.11.03

Corr



Donner le principe de la solution cinématique inverse pour un robot mobile à deux roues actives, tel que Dark18 par exemple

A passer par des coordonnées intermédiaires : θ_1,d_2 et θ_3 pour assurer ainsi un déplacement en ligne droite

B mouvement linéaire: θ_g, θ_d=> d_x

C pour les mouvements rotatifs: θ_g, θ_d=> θ_z

D θ_1,d_2 et θ_3 => T_0^3 ; utiliser la méthode D-H

E Utiliser la méthode Amiguet (iAi-LaRA 1998)

2…Solution cinématique inverse(RM)

corr., 011.11.08

La méthode AMIGUET consiste à agir en trois temps, à passer par des coordonnées intermédiaires : θ_1,d_2 et θ_3 pour assurer ainsi un déplacement en ligne droite.

Dès lors trois sous-problèmes apparaissent:

- les «micro»-problèmes:
  1. pour le mouvement linéaire: d_x =>θ_g, θ_d
  2. pour les mouvements rotatifs: θ_z=> θ_g, θ_d
- le «macro»-problème:

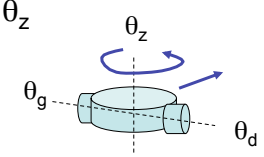
  T_0^3 => θ_1,d_2 et θ_3

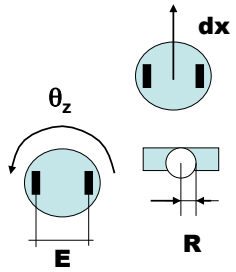
2…Solution cinématique inverse(RM)

011.11.08

Donner la solution cinématique inverse pour Dark18
selon les deux cas de base («micro»-problèmes):
1. dans un déplacement linéaire
2. dans un déplacement angulaire

Coordonnées articulaires :θ_g, θ_d
Coordonnées spatiales :
cas 1: dx
cas 2: θ_z





2…Solution cinématique inverse(RM)

corrigé 1 de 3, 011.11.08

Cas 1: Solution inverse, déplacement linéaire :
Données: dx (coordonnée spatiale)
Résultat recherché : θ_d , θ_g ;
2 roues (coordonnées articulaires,
grandeur géométrique: rayon de roue R)

$$\theta_d, \theta_g = \frac{dx}{R}$$

Si donnée matricielle: $T_1 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ => $dx = p_x$

2…Solution cinématique inverse(RM)

corrigé 2 de 3, 011.11.08

Cas 2: Solution inverse, déplacement angulaire :

Donnée : θ_z (coordonnée spatiale) (ou matrice T_2)

Résultat recherché : θ_d, θ_g ; 2 roues (coordonnées articulaires, grandeurs géométriques: rayon de roue R, entraxe E)

$$R \cdot \theta_d = \frac{E}{2}\theta_z$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} Cos\,\theta_z & -Sin\,\theta_z & 0 & 0 \\ Sin\,\theta_z & Cos\,\theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2…Solutions cinématiques005.12.09

corrigé 3 de 3

$$\theta_d = \frac{E \cdot \theta_z}{2 \cdot R} \qquad \theta_g = -\theta_d$$

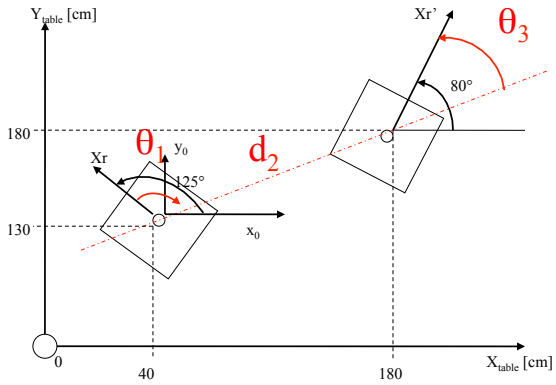
Si donnée matricielle:

$$T_2 = \begin{pmatrix} n_x & g_x & a_x & p_x \\ n_y & g_y & a_y & p_y \\ n_z & g_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \theta_z = arctg_4\left(\frac{n_y}{n_x}\right)$$

2…Solution cinématique inverse 005.12.20

Trouver les coordonnées intermédiaires θ_1, d_2, θ_3 pour Dark18, connaissant sa position (transformation) courante et sa position future visée

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

2…Solution cinématique inverse

Corr

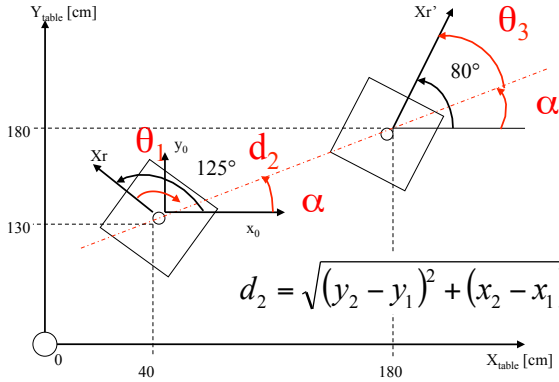
$$\alpha = arctg\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \cong 20°$$

$$\theta_1 = \alpha - \varphi_1 = -105°$$

$$\theta_3 = \varphi_2 - \alpha = 60°$$

=>

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$$



$$\vec{P}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \cong 149\,[cm]$$

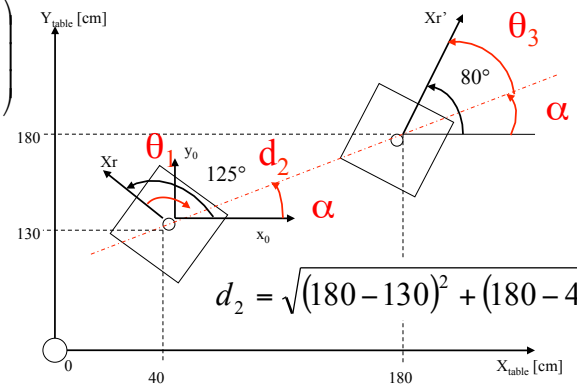
2…Solution cinématique inverse

005.12.20 Corr

$$\theta_1 = \alpha - 125 = -105°$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{180-130}{180-40}\right) \cong 20° \qquad \theta_3 = 80 - \alpha = 60°$$

$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 130 \\ 125° \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 180 \\ 180 \\ 80° \end{pmatrix}$$



$$d_2 = \sqrt{(180-130)^2 + (180-40)^2} \cong 149\,[cm]$$

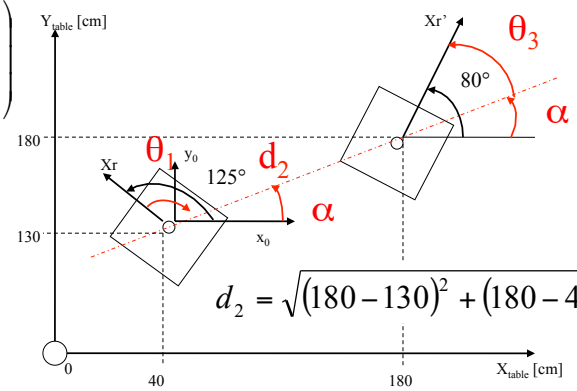
2…Solution cinématique inverse

005.12.20 Corr

$$\theta_1 = \alpha - 125 = -105°$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{180-130}{180-40}\right) \cong 20° \qquad \theta_3 = 80 - \alpha = 60°$$

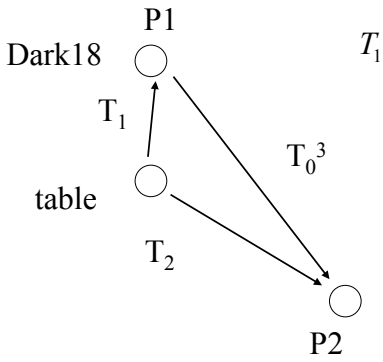
$$\vec{P}_1 = \begin{pmatrix} 40 \\ 130 \\ 125° \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \vec{P}_2 = \begin{pmatrix} 180 \\ 180 \\ 80° \end{pmatrix}$$



$$d_2 = \sqrt{(180-130)^2 + (180-40)^2} \cong 149\,[cm]$$

2…Solution cinématique inverse

Corr



$$T_1 = \begin{pmatrix} Cos\varphi_1 & -Sin\varphi_1 & 0 & x_1 \\ Sin\varphi_1 & Cos\varphi_1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} Cos\varphi_2 & -Sin\varphi_2 & 0 & x_2 \\ Sin\varphi_2 & Cos\varphi_2 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_0^{\ 3} = T_1^{-1} \cdot T_2$$

Autre solution possible…